Лабораторная работа №5.
Матричные игры двух лиц с нулевой суммой

1. Цель работы

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования (с использованием пакета экономических расчетов).

2. Краткие теоретические сведения

Игрой называют упрощенную модель конфликтной ситуации. Игра ведется по определенным правилам. Суть игры в том, что каждый из участников принимает такие решения, которые, как он полагает, могут обеспечить ему наилучший результат (исход). Исход игры – это значение некоторой функции, называемой функцией выигрыша (платежной функции). Если сумма выигрышей игроков равна нулю, то игру называют игрой с нулевой суммой.

Пусть игроки А и В располагают конечным числом возможных действий – чистых стратегий. Обозначим их соответственно через $A_1,\dots,A_m$ и $B_1,\dots,B_n$. Игрок А может выбрать любую чистую стратегию $A_i (i=1,\dots,m)$, в ответ на которую игрок В может выбрать любую свою чистую стратегию $B_j (j=1,\dots,n)$. Если игра состоит только из личных ходов, то выбор пары стратегий $(A_i;B_j)$ единственным образом определяет результат a_{ij} - выигрыш игрока А. При этом проигрыш игрока В составит $(-a_{ij})$. Если известны значения a_{ij} выигрыша для каждой пары $(A_i;B_j)$ чистых стратегий, то можно составить матрицу выигрышей игрока А (проигрышей игрока В).

Для игр без седловых точек оптимальные стратегии игроков находятся в области смешанных стратегий. Смешанной стратегией игрока называется вектор $p=(p_1,\dots,p_m)$, компоненты которого удовлетворяют условиям $p_i \ge 0 (i=1,\dots,m)$;

$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Смешанной стратегией игрока В называют вектор $q=(q_1,\dots,q_n)$, где $q_j \ge 0 (j=1,\dots,n)$;

$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$; p_i и q_j - вероятности, с которыми игроки А и В выбирают свои чистые стратегии $A_i (i=1,\dots,m)$ и $B_j (j=1,\dots,n)$. При использовании смешанных стратегий игра приобретает случайный характер, случайной становится и величина выигрыша игрока А (проигрыша игрока В). Эта величина является функцией смешанных стратегий p и q и определяется по формуле $f(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot p_i \cdot q_j$. Функцию $f(p,q)$ называют платежной или функцией выигрыша.

3. Выполнение работы

1) Выполнить возможные упрощения платежных матриц

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

После упрощения

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	1	2	4
A_2	1	4	1	3
A_3	3	0	1	0

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ 1 Стр. : 1

Перемени. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Перемени. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен
1	X1	0.4286	0.0000	10	S4	1.1429	0.0000
2	X2	0.1429	0.0000	11	A4	0.0000	0.0000
3	X3	0.0000	0.0000	12	S5	0.4286	0.0000
4	S1	0.0000	0.0000	13	A5	0.0000	0.0000
5	A1	0.0000	0.0000	14	S6	0.1429	0.0000
6	S2	0.0000	0.1429	15	A6	0.0000	0.0000
7	A2	0.0000	-0.1429	16	S7	0.0000	0.5714
8	S3	0.0000	0.4286	17	A7	0.0000	-0.5714
9	A3	0.0000	-0.4286				

MIN величина цел.ф-и = .5714286 Итерац.= 8

$p_1=0.75$
$p_2=0.25$
$p_3=0$

$$v = \frac{1}{f_{\min}} = \frac{1}{0.5714286} = 1.75$$

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ 1 Стр. : 1

Перемени. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Перемени. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен
1	X1	0.2857	0.0000	9	A4	0.0000	0.0000
2	X2	0.1429	0.0000	10	S5	0.1429	0.0000
3	X3	0.1429	0.0000	11	A5	0.0000	0.0000
4	X4	0.0000	0.0000	12	S6	0.1429	0.0000
5	S1	0.0000	0.4286	13	A6	0.0000	0.0000
6	S2	0.0000	0.1429	14	S7	0.0000	1.1429
7	S3	0.0000	0.0000	15	A7	0.0000	-1.1429
8	S4	0.2857	0.0000				

MAX величина цел.ф-и = .5714286 (множеств. реш.) Итерац.= 7

$q_1=0.5$
$q_2=0.25$
$q_3=0.25$
$q_4=0$

2) Выполнить возможные упрощения платежных матриц

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & -6 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

После упрощения

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ 1 Стр. : 1

Перемен. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Перемен. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен
1	X1	0.2500	0.0000	6	A2	0.0000	-0.1250
2	X2	0.1250	0.0000	7	S3	0.2500	0.0000
3	S1	0.0000	0.2500	8	A3	0.0000	0.0000
4	A1	0.0000	-0.2500	9	S4	0.1250	0.0000
5	S2	0.0000	0.1250	10	A4	0.0000	0.0000

MIN величина цел.ф-и = .375 Итерац.= 4

$p_1=0.67$
$p_2=0.33$

$$v=\frac{1}{f_{\min}}=\frac{1}{0.375}=2.667$$

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ 1 Стр. : 1

Перемен. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Перемен. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен
1	X1	0.2500	0.0000	5	S3	0.2500	0.0000
2	X2	0.1250	0.0000	6	A3	0.0000	0.0000
3	S1	0.0000	0.2500	7	S4	0.1250	0.0000
4	S2	0.0000	0.1250	8	A4	0.0000	0.0000

MAX величина цел.ф-и = .375 Итерац.= 4

$q_1=0.67$
$q_2=0.33$

3) Решить матричные игры, заданные платежными матрицами, сводя их к парам двойственных задач линейного программирования

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ 1 Стр. : 1

Перемен. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Перемен. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен
1	X1	0.1176	0.0000	9	A3	0.0000	0.0000
2	X2	0.0000	0.0000	10	S4	0.1176	0.0000
3	X3	0.1765	0.0000	11	A4	0.0000	0.0000
4	S1	0.0000	0.0588	12	S5	0.0000	0.1176
5	A1	0.0000	-0.0588	13	A5	0.0000	-0.1176
6	S2	0.0000	0.2353	14	S6	0.1765	0.0000
7	A2	0.0000	-0.2353	15	A6	0.0000	0.0000
8	S3	0.0588	0.0000				

MIN величина цел.ф-и = .2941177 Итерац.= 7

$p_1=0.4$
$p_2=0$
$p_3=0.6$

$$v = \frac{1}{f_{\min}} = \frac{1}{0.2941177}$$

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ 1 Стр. : 1					
Переменн. No. Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Переменн. No. Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен
1 Y1	0.0588	0.0000	7 S4	0.0588	0.0000
2 Y2	0.2353	0.0000	8 A4	0.0000	0.0000
3 Y3	0.0000	0.0000	9 S5	0.2353	0.0000
4 S1	0.0000	0.1176	10 A5	0.0000	0.0000
5 S2	0.1176	0.0000	11 S6	0.0000	0.0588
6 S3	0.0000	0.1765	12 A6	0.0000	-0.0588
MAX величина цел.ф-и = .2941177 Итерац.= 7					

$q_1=0.2$
$q_2=0.8$
$q_3=0$

4) Решить матричные игры, заданные платежными матрицами, сводя их к парам двойственных задач линейного программирования

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ 1 Стр. : 1					
Переменн. No. Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Переменн. No. Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен
1 X1	1.0556	0.0000	9 A3	0.0000	-0.6667
2 X2	0.3333	0.0000	10 S4	1.0556	0.0000
3 X3	0.5556	0.0000	11 A4	0.0000	0.0000
4 S1	0.0000	0.5000	12 S5	0.3333	0.0000
5 A1	0.0000	-0.5000	13 A5	0.0000	0.0000
6 S2	0.0000	0.7778	14 S6	0.5556	0.0000
7 A2	0.0000	-0.7778	15 A6	0.0000	0.0000
8 S3	0.0000	0.6667			
MIN величина цел.ф-и = 1.944445 Итерац.= 6					

$p_1=0.54$
$p_2=0.17$
$p_3=0.29$

$$v = \frac{1}{f_{\min}} = \frac{1}{1.94445} = 0.51$$

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ 1 Стр. : 1					
Переменн. No. Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Переменн. No. Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен
1 Y1	0.5000	0.0000	7 S4	0.5000	0.0000
2 Y2	0.7778	0.0000	8 A4	0.0000	0.0000
3 Y3	0.6667	0.0000	9 S5	0.7778	0.0000
4 S1	0.0000	1.0556	10 A5	0.0000	0.0000
5 S2	0.0000	0.3333	11 S6	0.6667	0.0000
6 S3	0.0000	0.5556	12 A6	0.0000	0.0000
MAX величина цел.ф-и = 1.944444 Итерац.= 6					

$q_1=0.26$
$q_2=0.4$
$q_3=0.34$

5) Произвести возможные упрощения платежных матриц и найти решения игр, к которым сводятся данные игры.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

После упрощения

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ 1 Стр. : 1

Перемен. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Перемен. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен
1	X1	0.5000	0.0000	8	S3	0.5000	0.0000
2	X2	0.0000	0.0000	9	A3	0.0000	0.0000
3	X3	0.8333	0.0000	10	S4	0.0000	4.0000
4	S1	0.0000	0.3333	11	A4	0.0000	-4.0000
5	A1	0.0000	-0.3333	12	S5	0.8333	0.0000
6	S2	0.0000	1.0000	13	A5	0.0000	0.0000
7	A2	0.0000	-1.0000				

MIN величина цел.ф-и = 1.333333 Итерац.= 5

$p_1=0.375$
$p_2=0$
$p_3=0.625$

$$v=\frac{1}{f_{\min}}=\frac{1}{1.333333}=0.75$$

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ 1 Стр. : 1

Перемен. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Перемен. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен
1	Y1	0.3333	0.0000	6	S4	0.3333	0.0000
2	Y2	1.0000	0.0000	7	A4	0.0000	0.0000
3	S1	0.0000	0.5000	8	S5	1.0000	0.0000
4	S2	4.0000	0.0000	9	A5	0.0000	0.0000
5	S3	0.0000	0.8333				

MAX величина цел.ф-и = 1.333333 Итерац.= 5

$q_1=0.25$
$q_2=0.75$
$q_3=0$

6) Произвести возможные упрощения платежных матриц и найти решения игр, используя графический метод решения соответствующих задач линейного программирования, к которым сводятся данные игры.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

После упрощения

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ 1 Стр. : 1

Перемен. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Перемен. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен
1	X1	0.0667	0.0000	8	S3	0.0667	0.0000
2	X2	0.0000	0.0000	9	A3	0.0000	0.0000
3	X3	0.2000	0.0000	10	S4	0.0000	0.0667
4	S1	0.0000	0.1667	11	A4	0.0000	-0.0667
5	A1	0.0000	-0.1667	12	S5	0.2000	0.0000
6	S2	0.0000	0.1000	13	A5	0.0000	0.0000
7	A2	0.0000	-0.1000				

MIN величина цел.ф-и = .2666667 Итерац.= 6

$p_1=0.25$
$p_2=0$
$p_3=0.75$

$$v = \frac{1}{f_{\min}} = \frac{1}{0.2666667} = 3.75$$

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ 1	Стр. : 1				
Переменн. No. Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Переменн. No. Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен
1 Y1	0.1667	0.0000	6 S4	0.1667	0.0000
2 Y2	0.1000	0.0000	7 A4	0.0000	0.0000
3 S1	0.0000	0.0667	8 S5	0.1000	0.0000
4 S2	0.0667	0.0000	9 A5	0.0000	0.0000
5 S3	0.0000	0.2000			
MAX величина цел.ф-и = .2666667 Итерац.= 4					

$q_1=0.625$
$q_2=0.375$

7) Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, считая состояние спроса полностью неопределенным, гарантируя при этом среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса. Дана следующая матрица прибылей:

	I	*II*	*II*	*IV*
А	8	3	6	2
Б	4	5	6	5
В	1	7	4	7

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ 1	Стр. : 1				
Переменн. No. Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Переменн. No. Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен
1 X1	0.0313	0.0000	10 S4	0.0000	0.1250
2 X2	0.1875	0.0000	11 A4	0.0000	-0.1250
3 X3	0.0000	0.0000	12 S5	0.0313	0.0000
4 S1	0.0000	0.0938	13 A5	0.0000	0.0000
5 A1	0.0000	-0.0938	14 S6	0.1875	0.0000
6 S2	0.0313	0.0000	15 A6	0.0000	0.0000
7 A2	0.0000	0.0000	16 S7	0.0000	0.0313
8 S3	0.3125	0.0000	17 A7	0.0000	-0.0313
9 A3	0.0000	0.0000			
MIN величина цел.ф-и = .21875 Итерац.= 9					

$p_1=0.14$
$p_2=0.86$
$p_3=0$

$$v = \frac{1}{f_{\min}} = \frac{1}{0.21875} = 4.57$$

Оптимальные пропорции в выпускаемой продукции:
Товара А – 14%
Товара Б – 86%
Товара В – 0%
При этом гарантированный уровень прибыли равен 4,57

8) Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию, которую оно может сразу отправить потребителю (стратегия А), отправить на склад для хранения (стратегия Б), или подвергнуть дополнительной обработке (стратегия В) для длительного хранения.

В свою очередь потребитель может немедленно приобрести эту продукцию (стратегия I), приобрести ее в течение небольшого отрезка времени (II) или затребовать ее после длительного периода времени (III).

Определить оптимальное соотношение между продукцией, отправляемой потребителю на склад и на дополнительную обработку, руководствуясь «минимаксным критерием» (гарантированный средний уровень убытка), при следующей матрице затрат:

	I	*II*	*III*
А	2	5	8
Б	7	6	10
В	12	10	8

Транспонируем матрицу

	А	*Б*	*В*	
I	2	7	12	2
II	5	6	10	5
III	8	10	8	8
	8	10	12	8 \ 8

Минимаксной для предприятия будет стратегия А, при которой гарантированный средний уровень убытка = 8 (ущерб будет не больше 8).

9) Для отопления помещения необходимо приобрести топливо. Однако расход топлива и цены на него зависят от погоды в зимнее время (мягкая, нормальная и суровая зима)

Погода	мягкая	нормал.	суровая
Расход,т	5	10	18
Цена, руб./т	10	16	20

В настоящее время уголь может быть приобретен по минимальной цене (10 руб./т) и излишек неиспользованного угля можно реализовать весной по цене 5 руб./т. Можно избрать одну из трех стратегий в закупке угля A_1 – 5 т, A_2 – 10 т и A_3 – 18 т.

Предполагая, что подобных помещений имеется 100, определить оптимальную стратегию в образовании запасов, руководствуясь «минимаксным критерием».

Запишем матрицу затрат

	A_1	A_2	A_3
М	5000	7500	12500
Н	13000	10000	14000
С	31000	26000	18000

После упрощения

	A_1	A_2	A_3
С	31000	26000	18000

Оптимальной является стратегия A_3
Минимаксные затраты 18 000р.

10) Магазин может завести в различных пропорциях товары 3-х типов (А,Б,В). Их реализация, а следовательно, и получаемая магазином прибыль (a_{ik}) зависят от вида товара и состояния спроса. Предполагая, что последний может характеризоваться тремя состояниями (I,II,III) и учитывая, что спрос связан с изменением моды и прогнозирование его невозможно, определить оптимальные пропорции в закупке товаров из условия средней гарантированной прибыли при следующей матрице прибылей:

	I	*II*	*III*
А	20	15	10
Б	16	12	14
В	13	18	15

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ nastya Стр. : 1

Перемен. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Перемен. No.	Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен
1	X1	0.0032	0.0000	9	A3	0.0000	-0.0333
2	X2	0.0437	0.0000	10	S4	0.0032	0.0000
3	X3	0.0238	0.0000	11	A4	0.0000	0.0000
4	S1	0.0000	0.0214	12	S5	0.0437	0.0000
5	A1	0.0000	-0.0214	13	A5	0.0000	0.0000
6	S2	0.0000	0.0159	14	S6	0.0238	0.0000
7	A2	0.0000	-0.0159	15	A6	0.0000	0.0000
8	S3	0.0000	0.0333				

MIN величина цел.ф-и = 7.063492E-02 Итерац.= 6

$p_1=0.04$
$p_2=0.62$
$p_3=0.34$

$$v=\frac{1}{f_{\min}}=\frac{1}{0.7063492}=14.16$$

Оптимальные пропорции в закупке товаров:
Товара А – 4%
Товара Б – 62%
Товара В – 34%
При этом гарантированный уровень прибыли равен 14,16.