# Лабораторная работа №3

*Тема: Управление запасами.*
*Цель работы: знакомство с задачами управления запасами, изучение различных методов решения в системе компьютерной математики.*

## 1. Краткие теоретические сведения

### *1.1. Классическая задача экономичного размера заказа*

Простейшие модели управления запасами характеризуются постоянным во времени спросом, мгновенным пополнением запаса и отсутствием дефицита. Введем обозначения:

$y$ — объем заказа (количество единиц продукции),

$D$ — интенсивность спроса (измеряется в единицах продукции на единицу времени),

$to$ — продолжительность цикла заказа (измеряется во временных единицах).

Уровень запаса изменяется в соответствии с функцией, показанной на рис. 1, где использованы приведенные выше обозначения. Заказ объема $y$ единиц размещается и пополняется мгновенно, когда уровень запаса равен нулю. Затем запас равномерно расходуется с постоянной интенсивностью спроса $D$. Продолжительность цикла заказа для этого примера равна

$$t_0 = \frac{y}{D} \text{ единиц времени.}$$

Средний уровень запаса определяется соотношением

$$\text{средний уровень запаса} = \frac{y}{2} \text{ единиц.}$$

Оптимальная стратегия управления запасами для рассмотренной модели формулируется следующим образом:

$$\text{Заказывать } y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \text{ единиц продукции через каждые } t_0^* = \frac{y^*}{D} \text{ единиц времени.}$$

В действительности пополнение запаса не может произойти мгновенно в момент размещения заказа, как предполагалось ранее. Для большинства реальных ситуаций существует положительный **срок выполнения** заказа $L$ (временное запаздывание) от момента его размещения до реальной поставки, как показано на рис. 1. В этом случае **точка возобновления заказа** имеет место, когда уровень запаса опускается до $LD$ единиц.

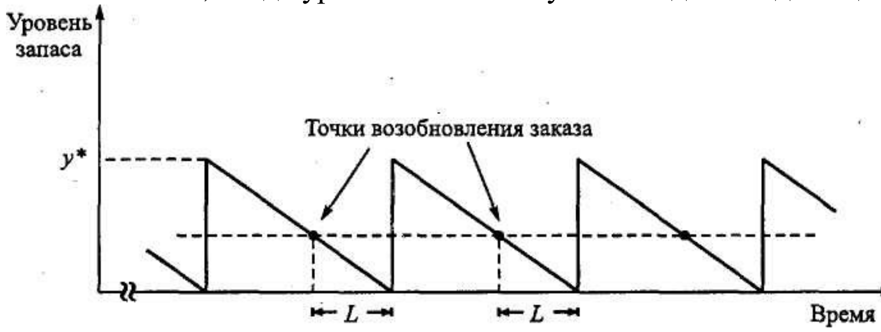



*Рис. 1*

На рис. 1 представлено изменение уровня запаса во времени в предположении, что срок выполнения заказа $L$ меньше продолжительности цикла заказа $t''_0$, что в общем случае выполняется не всегда. В противном случае определяется *эффективный* срок $L_e$ выполнения заказа в виде

$$L_e = L - n\,t_0^*,$$

где $n$— наибольшее целое, не превышающее $L/t^*_0$. Такое решение оправдывается тем, что после $n$ циклов (длиной $t'_o$ каждый) ситуация управления запасами становится такой же, как если бы интервал между размещением одного заказа и получением другого был равен $L_e$. Следовательно, точка возобновления заказа имеет место при уровне запаса $L_eD$ единиц продукции, и стратегия управления запасами может быть переформулирована следующим образом.

Заказывать y* единиц продукции, как только уровень запаса опускается до LeD единиц.

**Пример 1**

Неоновые лампы в университетском городке заменяются с интенсивностью 100 штук в день. Подразделение материального обеспечения городка заказывает эти лампы с определенной периодичностью. Стоимость размещения заказа на покупку ламп составляет 100 долларов. Стоимость хранения лампы на складе оценивается в 0,02 доллара в день. Срок выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки равен 12 дней. Требуется определить оптимальную стратегию заказа неоновых ламп.

На основании приведенных данных имеем следующее.

$D$ = 100 единиц в день,

$K$ = 100 долларов за заказ,

$h$ = 0,02 доллара за хранение одной лампы в день,

$L$= 12 дней.

Следовательно,

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2\times100\times100}{0.02}} = 1000 \text{ ламп.}$$

Соответствующая длина цикла составляет

$$t_0^* = \frac{y^*}{D} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ дней.}$$

Так как срок выполнения заказа $L$ = 12 дней превышает продолжительность цикла $t^*_0$ (=10 дней), необходимо вычислить $L_e$. Число целых циклов, заключенных в $L$, равно

$$n = (\text{наибольшее целое} \le L/t^*_0) = (\text{наибольшее целое} \le 12/10) = 1.$$

Следовательно,

$$L_c = L - nt^*_0 = 12-1\times10 = 2 \text{ дня.}$$

Поэтому точка возобновления заказа имеет место при уровне запаса $L_eD$=2×100=200 неоновых ламп.

Оптимальная стратегия заказа неоновых ламп может быть сформулирована следующим образом.

Заказать 1000 ламп, как только уровень их запаса уменьшается до 200 единиц.

Дневные расходы, связанные с содержанием запаса в соответствии с оптимальной стратегией, равны

$$TCU(y) = \frac{K}{\frac{y}{D}} + h\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{100}{\frac{1000}{100}} + 0.02\left(\frac{1000}{2}\right) = 20 \text{ долларов в день.}$$

## *1.2. Задача экономичного размера заказа с разрывами цен*

Представленная в этом разделе модель управления запасами отличается от рассмотренной в разделе 1.1 только тем, что продукция может быть приобретена со скидкой, если объем заказа $y$ превышает некоторый фиксированный уровень $q$; таким образом, стоимость единицы продукции $c$ определяется как

$$c = \begin{cases} c_1, & \text{если } y \le q, \\ c_2, & \text{если } y > q, \end{cases}$$

где $c_1 > c_2$. Следовательно,

$$\text{затраты на приобретение продукции в единицу времени} = \begin{cases} \dfrac{c_1 y}{t_0} = \dfrac{c_1 y}{\left(\dfrac{y}{D}\right)} = Dc_1, & y \le q, \\ \dfrac{c_2 y}{t_0} = \dfrac{c_1 y}{\left(\dfrac{y}{D}\right)} = Dc_2, & y > q. \end{cases}$$

Используя обозначения из раздела 1.1, запишем общие затраты в единицу времени следующим образом.

$$TCU(y)=\begin{cases} TCU_1(y)=Dc_1+\dfrac{KD}{y}+\dfrac{h}{2}y, & y\le q, \\ TCU_2(y)=Dc_2+\dfrac{KD}{y}+\dfrac{h}{2}y, & y>q. \end{cases}$$

Графики функций $TCU_1$ и $TCU_2$ представлены на рис. 2. Так как значения этих функций отличаются только на постоянную величину, то точки их минимума совпадают и находятся в точке

$$y_m=\sqrt{\frac{2KD}{h}}.$$

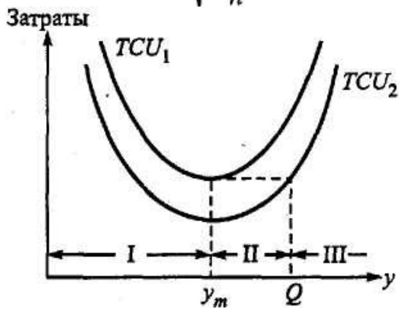



*Рис. 2*

График функции затрат *TCU(y),* если идти от минимальных значений аргументов, совпадает с графиком функции $TCU_1(y)$ до точки $y = q$, в которой меняется цена продукции, а затем совпадает с графиком функции $TCU_2(y)$. Рис. 2 показывает, что определение оптимального объема заказа У зависит от того, где находится точка разрыва цены $q$ по отношению к указанным на рисунке зонам I, II и III, которые определены как интервалы $[0, y_m)$, $[y_m, Q)$ и $[Q, \infty)$ соответственно. Величина $Q$ $(> y_m)$ определяется из уравнения

$$TCU_2(Q)=TCU_1(y_m).$$

Рис. 2 показывает, как определяется оптимальное значение $y^*$.

$$y^*=\begin{cases} y_m, & \text{если } q \text{ находится в зоне I или III,} \\ q, & \text{если } q \text{ находится в зоне II.} \end{cases}$$

Алгоритм определения у* можно сформулировать в следующем виде.

**Шаг 1**. Вычисляем $y_m=\sqrt{\frac{2kD}{h}}$. Если $q$ попадает в зону I, полагаем $y^*=y_m$. В противном случае переходим к шагу 2.

**Шаг** 2. Находим $Q$ из уравнения *TCU2(Q)* = *TCU*($y_m$) и определяем зоны II и ИГ Если $q$ находится в зоне II, полагаем $y^*=q$. Иначе $q$ находится в зоне III, тогда $y^*=y_m$.

**Пример 2**

Автомобильная мастерская специализируется на быстрой замене масла в автомобилях. Мастерская покупает автомобильное масло в большом количестве по 3доллара за галлон. Цена может быть снижена до 2,50 долларов за галлон при условии, что мастерская покупает более 1000 галлонов. За день в мастерской обслуживается около 150 автомобилей, и на каждый из них для замены требуется 1,25галлона масла. Мастерская хранит на складе большие объемы масла, что обходится в 0,02 доллара в день за один галлон. Стоимость размещения заказа на большой объем масла равна 20 долларов. Срок выполнения заказа равен 2 дня. Требуется определить оптимальную стратегию управления запасами.

Дневное потребление масла равно

$D$ = 125 автомобилей×1,25 галлона = 187,5 галлона в день.

Также имеем

$h$ = \$0,02 за галлон в день,

$K$ = \$20 за заказ,

$L$ = 2 дня,

$c_1$ = \$3 за галлон,

$c_2$ = \$2,50 за галлон,

$q$ = 1000 галлонов.

*Шаг I.* Вычисляем

$$y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2\times 20\times 187.5}{0.02}} = 612.37 \text{ галлонов.}$$

Так как $q$ = 1000 больше $y_m$ = 612,37, переходим к шагу 2.

*Шаг 2.* Вычисляем $Q$ из уравнения

$$TCU_2(Q) = TCU_1(y_m)$$

или

$$c_2 D + \frac{KD}{Q} + \frac{hQ}{2} = c_1 D + \frac{KD}{y_m} + \frac{hy_m}{2}.$$

Подставляя данные в это уравнение, получаем .

$$2.5\times 187.5 + \frac{20\times 187.5}{O} + \frac{0.02Q}{2} = 3\times 187.5 + \frac{20\times 187.5}{612.37} + \frac{0.02\times 612.37}{2}.$$

После упрощений имеем

$$0{,}01Q^2 - 106Q + 3750 = 0.$$

Решением этого уравнения будет $Q$ = 10564,5 (> $y_m$). Следовательно,

Зона II = [612,37, 10564,5), Зона III = [10564,5, ∞).

Так как $q$ (= 1000) находится в зоне II, оптимальный объем заказа равен $y^* = q$ = 1000 галлонов.

При заданном сроке выполнения заказа в 2 дня точкой возобновления заказа является 2D = 2×187,5= 375 галлонов. Следовательно, оптимальная стратегия управления запасами формулируется следующим образом.

Заказать 1000 галлонов масла, когда уровень запаса понижается до 375 галлонов.

## *1.3. Многопродуктовая статическая модель с ограниченной вместимостью склада*

Эта модель рассматривает задачу управления запасами $n$ различных товаров, которые хранятся на одном складе ограниченной вместимости. Характер изменения запаса каждого товара в отдельности определяется функцией, показанной на рис. 1; предполагаем, что дефицит отсутствует. Отличие от ранее рассмотренных моделей состоит в том, что товары конкурируют между собой за ограниченное складское пространство.

Определим для товара $i$, $i$=1,2,...,$n$, следующие параметры.

$D_i$ — интенсивность спроса,

$K_i$ — стоимость размещения заказа,

$h_i$ — стоимость хранения единицы товара в единицу времени,

$y_i$ — объем заказа,

$a_i$ — необходимое пространство для хранения единицы товара,

$A$ — максимальное складское пространство для хранения товаров $n$ видов.

При отсутствии дефицита математическая модель сформулированной задачи имеет следующий вид.

$$\textbf{Минимизировать } TCU(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{K_i D_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2}\right)$$

при ограничениях

$$\sum^{n} a_i y_i \le A,$$

$$y_i > 0,\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Алгоритм решения этой задачи можно описать следующим образом.

**Шаг** 1. Вычисляются оптимальные объемы заказов *без учета ограничения* по вместимости склада:

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i}},\ i = 1,2,\ldots,n.$$

**Шаг** 2. Осуществляется проверка, удовлетворяют ли найденные значения $y^*$ ограничению по вместимости склада. Если "Да", вычисления заканчиваются, при этом значения $y'$, $/= 1, 2, ..., n$ являются оптимальными. В противном случае следует перейти к шагу 3.

**Шаг 3.** Ограничение по вместимости склада должно удовлетворяться в форме равенства. Используется метод множителей Лагранжа для определения оптимальных объемов заказа для задачи с ограничением.

На шаге 3 строится функция Лагранжа

$$L(\lambda, y_1, y_2, \dots, y_n) = TCU(y_1, y_2, \dots, y_n) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - A\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{K_i D_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2}\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - A\right),$$

где $\lambda$ (< 0) — множитель Лагранжа.

Так как функция Лагранжа является выпуклой, оптимальные значения $y_t$ и $\lambda$ находятся из следующих уравнений, которые представляют собой необходимые условия экстремума функции Лагранжа.

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -\frac{K_i D_i}{y_i^2} + \frac{h_i}{2} - \lambda a_i = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} a_i y_i + A = 0.$$

Второе уравнение показывает, что ограничение по вместимости склада в оптимальной точке должно удовлетворяться в форме равенства. Из первого уравнения следует, что

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i - 2\lambda^* a_i}}.$$

Полученная формула показывает, что $y_i^*$ зависит от оптимального значения $\lambda^*$ множителя Лагранжа. Кроме того, при $\lambda^* = 0$ значение $y_i^*$ является решением задачи без ограничения.

Значение $\lambda^*$ может быть найдено следующим образом. Так как по определению в поставленной выше задаче минимизации $\lambda^* < 0$, мы последовательно уменьшаем $\lambda$ на достаточно малую величину и используем ее в данной формуле для вычисления соответствующего значения $y_i^*$. Искомое значение $\lambda^*$ приводит к значениям $y_i^*$, $i=1,2,...,n$, которые удовлетворяют ограничению по вместимости склада в форме равенства.

**Пример 3**

Рассмотрим задачу управления запасами, исходные данные для которой приведены в следующей таблице.

| Товар $i$ | $K_i(\$)$ | $D_i$ (единиц в день) | $h_i$ | $a_i$ (кв. футы) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 2 | 0,3 | 1 |
| 2 | 5 | 4 | 0,1 | 1 |
| 3 | 15 | 4 | 0,2 | 1 |
| Общая площадь склада = 25 футов$^2$ | | | | |

Уменьшаем $\lambda$ с шагом 0.1. Результаты вычислений приведены в следующей таблице.

| $\lambda$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $\sum^{n} a_i y_i - A$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 11.5 | 20.0 | 24.5 | +31.0 |
| -0,1 | 8,9 | 11,5 | 17,3 | +12,7 |
| -0,2 | 7,6 | 8,9 | 14,1 | +5,6 |
| -0,3 | 6,7 | 7,6 | 12,2 | +1,5 |
| -0,4 | 6,0 | 6,7 | 11,0 | -1,3 |

Последний столбец показывает, что ограничение по вместимости склада в форме равенства выполняется в интервале $-0,3 > \lambda > -0,4$. Дальше можно использовать надлежащие методы численного анализа для нахождения соответствующего значения $\lambda$ из указанного интервала. Используя такую процедуру, получаем $\lambda^* = -0{,}345$, что дает $y_1$=6,35 единицы, $y_2$=7,11 единицы, $y_3$=11,6 единицы.

Как показывает предыдущий пример, вычисления всегда начинаются со значения $\lambda = 0$, что может привести к неэффективной вычислительной процедуре. Это положение может быть улучшено путем надлежащего выбора начального значения $\lambda$.

На основе уравнения в частных производных задачи управления запасами этой главы покажите, что в качестве начального значения $\lambda$ в процедуре поиска оптимального значения этого параметра можно взять величину

$$\lambda^* \approx \frac{\overline{h}}{2\overline{a}} - \frac{n^2\overline{a}\,\overline{KD}}{A^2},$$

где

$$\overline{h} = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i}{n},\quad \overline{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n},\quad \overline{KD} = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i D_i}{n}.$$

Точное значение $\lambda$ находится выше или ниже $\lambda^*$.

### *1.4. Динамическая модель без затрат на оформление заказа*

Компания производит специальные вытяжки, которые используются в домашних каминах в период с декабря по март. В начале отопительного сезона спрос на эту продукцию низкий, в середине сезона он достигает своего пика и уменьшается к концу сезона. Учитывая популярность продукции, компания может использовать сверхурочные работы для удовлетворения спроса на свою продукцию. Следующая таблица содержит данные о производственных мощностях компании и объемах спроса на протяжении четырех месяцев.

| | Возможности производства | | |
|---|---|---|---|
| Месяц | Обычный режим работы (единицы) | Сверхурочные (единицы) | Спрос(единицы) |
| 1 | 90 | 50 | 100 |
| 2 | 100 | 60 | 190 |
| 3 | 120 | 80 | 210 |
| 4 | 110 | 70 | 160 |

Стоимость производства единицы продукции равна 6 долларов в условиях обычного режима работы и 9 долларов при сверхурочных работах. Стоимость хранения единицы продукции на протяжении месяца равна 0,10 доллара.

Чтобы гарантировать допустимое решение при отсутствии дефицита, требуется, чтобы суммарное предложение продукции (возможности производства) к началу каждого месяца по меньшей мере равнялось суммарному спросу. Об этом свидетельствует следующая таблица.

| Месяц | Суммарное предложение | Суммарный спрос |
|---|---|---|
| 1 | 90 + 50 = 140 | 100 |
| 2 | 140+100 + 60 = 300 | 100+190 = 290 |
| 3 | 300+120 + 80 = 500 | 290 + 210 = 500 |
| 4 | 500 + 110 + 70 = 680 | 500+ 160 = 660 |

В табл. 1 содержатся данные, относящиеся к рассматриваемой задаче, и ее решение. Здесь $R_i$ и $O_i$ соответствуют уровням производства в обычном и сверхурочном режиме работы на протяжении периода $i$, $i$ = 1,2,3,4. Так как суммарное предложение в четвертом периоде превышает суммарный спрос, то введен искусственный пункт потребления (избыток), чтобы сбалансировать модель (это показано в табл. 1). Все "транспортные" маршруты из предыдущего в текущий период заблокированы, так как дефицит отсутствует.

Себестоимости "перевозок" продукции вычисляются в виде суммы затрат на производство и хранение. Например, соответствующая себестоимость от $R_1$ до первого периода равна лишь стоимости изготовления в 6 долларов, себестоимость от $O_1$ до четвертого периода — стоимости изготовления плюс стоимость хранения от первого периода до четвертого, т.е. 9 + (0,1 +0,1 + 0,1) = 9,30 доллара. Наконец, себестоимость перевозки до искусственного пункта потребления (*избыток*) равна нулю.

Оптимальное решение получается в один проход, начиная с первого столбца в направлении к столбцу "Избыток". Для каждого перспективного столбца спрос удовлетворяется с использованием самого дешевого маршрута ([1] Доказательство оптимальности этой процедуры приведено в работе Johnson S.M. "Sequential Production Planning over Time at Minimum Cost", *Management Science,* Vol.3, 1957, pp. 435-437.).

Начиная с первого столбца маршрут ($R_1$, 1) имеет самую дешевую себестоимость перевозки, и мы назначаем перевозку максимально возможного объема, а именно min(90, 100) = 90 единиц, что оставляет 10 единиц неудовлетворенного спроса в первом столбце. Далее мы переходим к следующему по себестоимости маршруту ($O_1$, 1) первого столбца и определяем перевозку min(50, 10)= 10 единиц, что теперь полностью удовлетворяет спрос для первого периода.

После удовлетворения спроса для первого периода мы переходим ко второму столбцу. Определение перевозок в этом столбце происходит следующим образом: 100 единиц по маршруту ($R_2$, 2), 60 единиц по маршруту ($O_2$, 2) и 30 единиц по маршруту ($O_1$, 2). Этим маршрутам соответствуют себестоимости "перевозок" в 6, 9 и 9,10 долларов. При этом маршрут ($R_2$, 2), транспортные расходы на единицу продукции для которого равны 6,10 долларов, не рассматривается, так как весь запас $R_1$ был израсходован для первого периода.

**Таблица 1**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | Избыток | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 6 **90** | 6.1 | 6.2 | 6.3 | 0 | **90** |
| $O_1$ | 9 **10** | 9.1 **30** | 9.2 **10** | 9.3 | 0 | **50→40→10** |
| $R_2$ | | 6 **100** | 6.1 | 6.2 | 0 | **100** |
| $O_2$ | | 9 **60** | 9.1 | 9.2 | 0 | **60** |
| $R_3$ | | | 6 **120** | 6.1 | 0 | **120** |
| $O_3$ | | | 9 **80** | 9.1 | 0 | **80** |
| $R_4$ | | | | 6 **110** | 0 | **110** |
| $O_4$ | | | | 9 **50** | 0 **20** | **70→20** |
| | **100 ↓ 10** | **190 ↓ 90 ↓ 30** | **210 ↓ 90 ↓ 10** | **160 ↓ 50** | **20** | |

Продолжая аналогичным образом, мы удовлетворяем спрос для третьего, а затем и четвертого столбцов. Оптимальное решение, выделенное жирным шрифтом в табл. 11.1, интерпретируется следующим образом.

**Период 1 (обычный режим работы).** Изготовить 90 единиц продукции для первого периода.

**Период 1 (сверхурочный режим работы).** Изготовить 40 единиц продукции: 10 для периода 1, 30 для периода 2 и 10 для периода 3.

**Период 2 (обычный режим работы).** Изготовить 100 единиц продукции для второго периода.

**Период 2 (сверхурочный режим работы).** Изготовить 60 единиц продукции для периода 2.

**Период 3 (обычный режим работы).** Изготовить 120 единиц продукции для третьего периода.

**Период 3 (сверхурочный режим работы).** Изготовить 80 единиц продукции для периода 3.

**Период 4 (обычный режим работы).** Изготовить 110 единиц продукции для четвертого периода.

**Период 4 (сверхурочный режим работы).** Изготовить 50 единиц продукции для периода 4; осталась неиспользованной производственная мощность на 20 единиц продукции.

Соответствующие суммарные затраты при этом равны

90×6+10×9+30×9,10+100×6+60×9+10×9,20+120×6+80×9+110×6+50×9=4685 долларов.

## *1.5. Динамическая модель с затратами на оформление заказа*

В рассматриваемой модели предполагается, что дефицит не допускается и затраты на оформление заказа учитываются всякий раз, когда начинается производство новой партии продукции. Здесь будут рассмотрены два метода решения этой задачи: точный метод динамического программирования и эвристический.

$z_i$ — количество заказанной продукции (объем заказа),

$D_i$ — потребность в продукции (спрос),

$x_i$ — объем запаса на начало этапа $L$

Стоимостные элементы в рассматриваемой задаче определяются так:

$K_i$ — затраты на оформление заказа,

$h_i$ — затраты на хранение единицы продукции, переходящей из этапа $i$ в этап $i+1$.

Соответствующая функция производственных затрат для этапа $i$ задается формулой

$$C_i(z_i) = \begin{cases} 0, & z_i = 0, \\ K_i + c_i(z_i), & z_i > 0, \end{cases}$$

где $c_i(z_i)$ — функция предельных производственных затрат при заданном значении $z_i$.

*Алгоритм динамического программирования с общей функцией стоимости.* Так как дефицит не допускается, задача управления запасами сводится к нахождению значений $z_i$, минимизирующих суммарные затраты, связанные с размещением заказов, закупкой и хранением продукции на протяжении $n$ этапов. Затраты на хранение на *i-м* этапе для простоты предполагаются пропорциональными величине

$$x_{i+1}=x_i+z_i-D_i,$$

которая представляет собой объем запаса, переходящего из этапа $i$ в этап $i+1$.

Для построения модели динамического программирования можно воспользоваться рекуррентными соотношениями процедуры прямой или обратной прогонки (см. главу 10). Мы воспользуемся рекуррентными соотношениями процедуры прямой прогонки, так как они более эффективны при анализе важного частного случая рассматриваемой задачи, связанного с невозрастающими предельными затратами.

Для рекуррентного уравнения процедуры прямой прогонки *состояние* на *этапе* (периоде) $i$ определяется как объем запаса $x_{i+}$ на конец этапа, где,

$$0<x_{i+1}<D_{i+1}+...+D_n.$$

Это неравенство означает, что в предельном случае запас $x_{i+}$ может удовлетворить спрос на всех последующих этапах.

Пусть $f_i(x_{i+1})$ — минимальные общие затраты на этапах 1, 2, ..., $i$ при заданной величине запаса $x_{i+1}$ на конец этапа $i$. Тогда рекуррентное уравнение алгоритма прямой прогонки будет записано следующим образом.

$$f_1(x_2) = \min_{0 \le z_1 \le D_1 + x_2} \{C_1(z_1) + h_1 x_2\},$$

$$f_i(x_{i+1}) = \min_{0 \le z_i \le D_i + x_{i+1}} \{C_i(z_i) + h_i x_{i+1} + f_{i-1}(x_{i+1} + D_i - z_i)\}, \quad i = 2,3,...,n.$$

**Пример 4**

Требуется найти оптимальную стратегию в трехэтапной системе управления запасами, которая формулируется ниже. Начальный запас равен $x_1$=1 единице продукции. Предполагается, что предельные затраты на приобретение продукции составляют 10 долларов за каждую единицу для первых трех единиц и 20 долларов — за каждую дополнительную единицу.

| Период $i$ | Спрос, $D_i$ (единицы) | Затраты на оформление заказа, $K_i$, ($) | Затраты на хранение, $h_i$, ($) |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | 1 |
| 2 | 2 | 7 | 3 |
| 3 | 4 | 6 | 2 |

Функция производственных затрат для периода г[1] равна С,(г,) = $K_t$ + с,(г,) для г, > 0, где

$$c_i(z_i)=\begin{cases}10z_i, & 0\le z_i\le 3,\\ 30+20(z_i-3), & z_i\ge 4.\end{cases}$$

*Этап* 1.$D_1$ = 3, 0≤$x_2$≤2 + 4 = 6.

| $x_2$ | $h_1x_2$ | $C_1(z_1)+h_1x_2$ | | | | | | | Оптимальное решение | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $z_1$=2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | |
| | | $C_1(z_1)$=23 | 33 | 53 | 73 | 93 | 113 | 133 | $f_1(x_2)$ | $z_1$* |
| 0 | 0 | 23 | | | | | | | 23 | 2 |
| 1 | 1 | | 34 | | | | | | 34 | 3 |
| 2 | 2 | | | 55 | | | | | 55 | 4 |
| 3 | 3 | | | | 76 | | | | 76 | 5 |
| 4 | 4 | | | | | 97 | | | 97 | 6 |
| 5 | 5 | | | | | | 118 | | 118 | 7 |
| 6 | 6 | | | | | | | 139 | 139 | 8 |

Так как $x_0$ = 1, минимальное значение $z_1$ равно $D_1$–$x_1$ = 3–1 =2.

*Этап* 2. $D_2$ = 2, 0≤$x_3$≤4.

| $x_3$ | $h_2x_3$ | $C_2(z_2)+h_2x_3+f_1(x_3+D_2-z_2)$ | | | | | | | Оптимальное решение | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $z_2$=0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| | | $C_2(z_2)$=0 | 17 | 27 | 37 | 57 | 77 | 97 | $f_2(x_3)$ | $z_2$* |
| 0 | 0 | 0 + 55 = 55 | 17 + 34 = 51 | 27 + 23 = 50 | | | | | 50 | 2 |
| 1 | 3 | 3 + 76 = 79 | 20 + 55 = 75 | 30 + 34 = 64 | 40 + 23 = 63 | | | | 63 | 3 |
| 2 | 6 | 6 + 97 = 103 | 23 + 76 = 99 | 33 + 55 = 88 | 43 + 34 = 77 | 63 + 23 = 86 | | | 77 | 3 |
| 3 | 9 | 9+118= 127 | 26 + 97= 123 | 36 + 76 = 112 | 46 + 55 = 101 | 66 + 34 = 100 | 86 + 23 = 109 | | 100 | 4 |
| 4 | 12 | 12+139 = 151 | 29+118 = 147 | 39 + 97 = 136 | 49 + 76 = 125 | 69 + 55 = 124 | 89 + 34 = 123 | 109 + 23 = 132 | 123 | 5 |

*Этап* 3. $D_3$ = 4, $x_4$=4.

| $x_4$ | $h_3x_4$ | $C_3(z_3)+h_3x_4+f_2(x_4+D_3-z_3)$ | | | | | Оптимальное решение | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $z_3$=0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| | | $C_3(z_3)$=0 | 16 | 26 | 36 | 56 | $f_3(x_4)$ | $z_3$* |
| 0 | 0 | 0+123 = 123 | 16+100= 116 | 26 + 77 = 103 | 36 + 63 = 99 | 56 + 50 = 106 | 99 | 3 |

Оптимальное решение определяется следующими значениями искомых переменных: $z_1$*=2, $z_2$*=3 и $z_3$*=3. При этом общие затраты составляют 99 долларов.

*Алгоритм динамического программирования для задачи* с *постоянными или невозрастающими предельными затратами.* Рассмотренную выше модель динамического программирования можно использовать при любых функциях затрат. Важным частным случаем этой модели является такая модель, когда на этапе $i$ как стоимость закупки единицы продукции, так и затраты на ее хранение есть *невозрастающими* (вогнутыми) функциями объема закупаемой и хранимой продукции соответственно. Такая же ситуация возникает, когда функция стоимости, отнесенная к единице продукции, является постоянной или когда имеет место оптовая скидка.

При указанных выше условиях можно доказать следующее.

1. При заданном начальном нулевом уровне запаса ($x_1$=0) для любого этапа $i$ оптимальной стратегией является удовлетворение спроса за счет либо новой закупленной продукции, либо запаса, но не с обоих источников, т.е. $z_i x_i$=0. (При положительном начальном уровне запаса ($x_1$>0) этот объем может быть списан из спроса последующих этапов, пока он не исчерпается.)

2. Оптимальный объем заказа $z_i$ на любом этапе $i$ должен либо равняться нулю, либо в точности соответствовать спросу одного или более последующих этапов.

Использование указанных двух свойств с рекуррентным уравнением для алгоритма прямой прогонки динамического программирования позволяет упростить схему вычислений.

## *1.6. Рандомизированная модель экономичного размера заказа*

Некоторые специалисты пытались адаптировать детерминированную модель экономичного размера заказа (см. раздел 1.1) для учета вероятностной природы спроса, используя при этом приближенный метод, который предполагает существование постоянного буферного запаса на протяжении всего планового периода. Размер резерва устанавливается таким образом, чтобы вероятность истощения запаса в течение *периода выполнения заказа* (интервала между моментом размещения заказа и его поставкой) не превышала наперед заданной величины.

Введем следующие обозначения.

$L$ — срок выполнения заказа, т.е. время от момента размещения заказа до его поставки, $x_L$— случайная величина, представляющая величину спроса на протяжении срока выполнения заказа,

$\mu_L$ — средняя величина спроса на протяжении срока выполнения заказа,

$\sigma_L$ — среднеквадратическое отклонение величины спроса на протяжении срока выполнения заказа,

$B$ — размер резервного запаса,

$\alpha$ — максимально возможное значение вероятности истощения запаса на протяжении срока выполнения заказа.

Основным предположением при построении модели является то, что величина спроса $x_L$ на протяжении срока выполнения заказа $L$ является нормально распределенной случайной величиной со средним $\mu_L$ и стандартным отклонением $\sigma_L$, т.е. имеет распределение $N(\mu_L, \sigma_L)$.

На рис. 3 показана зависимость между размером резервного запаса $B$ и параметрами детерминированной модели экономичного размера заказа, которая включает срок выполнения заказа $L$, среднюю величину спроса $\mu_L$ на протяжении срока выполнения заказа и экономичный размер заказа $y$*. Заметим, что $L$ должно быть равно *эффективному* времени выполнения заказа, как это определено в разделе 1.1.

Вероятностное условие, которое определяет размер резервного запаса $B$, имеет вид

$$P\{x_L > B + \mu_L\} < a.$$

является нормированной нормально распределенной случайной величиной, т.е. имеет распределение $N(0,1)$. Следовательно,

$$z = \frac{x_L - \mu_L}{\sigma_L}.$$

По определению случайная величина

$$P\left\{z \geq \frac{B}{\sigma_L}\right\} \leq \alpha.$$

На рис. 4 показана величина $K_a$, которая определяется из таблицы стандартного нормального распределения (см. Приложение Д), так что

$$P\{z > K_a\} = \alpha.$$

Следовательно, размер резервного запаса должен удовлетворять неравенству

$$B \geq \sigma_L K_\alpha.$$

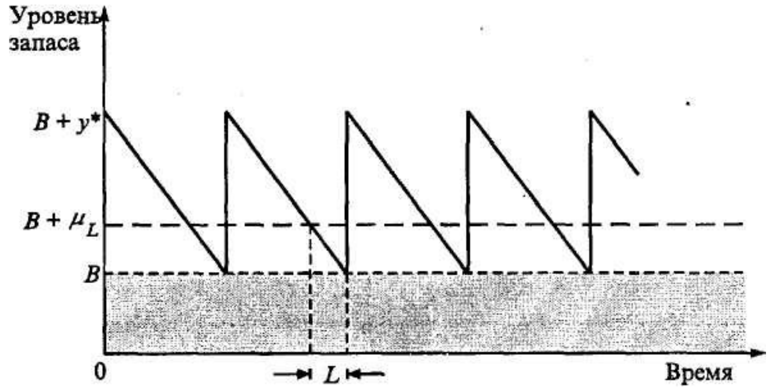



Рис.3.

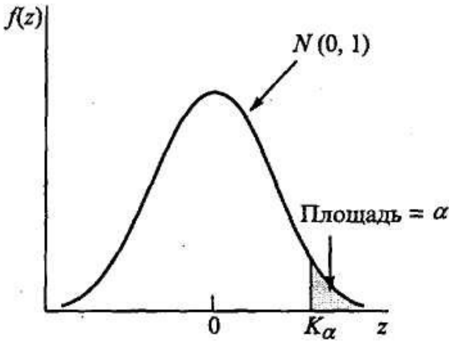



Рис.4.

Величина спроса на протяжении срока выполнения заказа $L$ обычно описывается плотностью распределения вероятностей, отнесенной к *единице времени* (например, к дню или неделе), из которой можно определить распределение спроса на протяжении периода $L$. В частности, если спрос за единицу времени является нормально распределенной случайной величиной со средним $D$ и стандартным отклонением *о,* то общий спрос на протяжении срока выполнения заказа $L$ будет иметь распределение $N(\mu_L, \sigma_L)$, где $\mu_L = DL$ и $\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L}$. Формула для $\sigma_L$ получена на основании того, что значение $L$ является целым числом (или же округлено до целого числа).

**Пример 5**

В примере 1, где речь шла об управлении запасом неоновых ламп в университетском городке, был определен экономичный размер заказа в 1000 ламп. Требуется определить размер резервного запаса таким образом, чтобы вероятность истощения запаса не превышала $\alpha$=0,05 при условии, что дневной спрос является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $D$=100 ламп и среднеквадратическим отклонением $\sigma$=10 ламп, т.е. имеет распределение $N(100, 10)$.

Как следует из примера 1, эффективное время выполнения заказа $L$ равно 2 дня. Следовательно,

$$\mu_L = DL = 100 \times 2 = 200 \text{ единиц}$$

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L} = \sqrt{10^2 \times 2} = 14.14 \text{ единиц}$$

Из таблицы стандартного нормального распределения (Приложение) определяем $K_{0,05}$=1,64. Следовательно, размер резервного запаса вычисляется следующим образом.

$B \geq 14{,}14 \times 1{,}64 = 23$ неоновые лампы.

При экономичном размере заказа $y^*$=1000 единиц оптимальная политика управления запасами с объемом резерва $B$ состоит в заказе 1000 ламп, как только объем запаса уменьшается до 223 единиц ($=B+\mu_L=23+2\times100$).

### *1.7.Стохастическая модель экономичного размера заказа*

Нет оснований полагать, что "рандомизированная" модель экономичного размера заказа, рассмотренная в разделе 1.6, определит оптимальную политику управления запасами. Подтверждением этого является то, что существенная информация, имеющая отношение к вероятностной природе спроса, при этом подходе первоначально не учитывается, а используется лишь независимо на последнем этапе вычислений. Чтобы исправить такую "нездоровую" ситуацию, в этом разделе рассматривается более точная модель, в которой вероятностная природа спроса учитывается непосредственно в постановке задачи.

В отличие от случая, рассмотренного в разделе 1.6, в новой модели допускается неудовлетворенный спрос, как это показано на рис. 5. В рассматриваемой модели заказ размером $y$ размещается тогда, когда объем запаса достигает уровня $R$. Как и в детерминированном случае, уровень $R$, при котором снова размещается заказ, является функцией периода времени между размещением заказа и его выполнением. Оптимальные значения $y$ и $R$ определяются путем минимизации ожидаемых затрат системы управления запасами, отнесенных к единице времени, которые включают как расходы на размещение заказа и его хранение, так и потери, связанные с неудовлетворенным спросом.

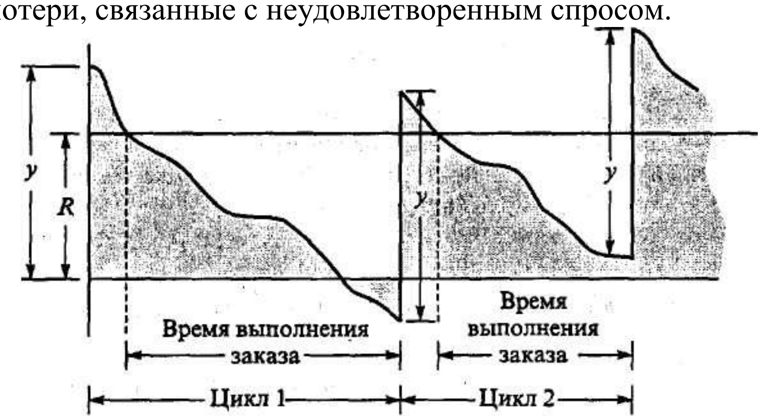



Рис. 5

В рассматриваемой модели приняты три допущения.

1. Неудовлетворенный в течение срока выполнения заказа спрос накапливается.
2. Разрешается не более одного невыполненного заказа.
3. Распределение спроса в течение срока выполнения заказа является стационарным(неизменным) во времени.

Для определения функции, отражающей суммарные затраты, отнесенные к единице времени, введем следующие обозначения.

$f(x)$ — плотность распределения спроса $x$ в течение срока выполнения заказа,

$D$ — ожидаемое значение спроса в единицу времени,

$h$ — удельные затраты на хранение (на единицу продукции за единицу времени),

$p$ — удельные потери от неудовлетворенного спроса (на единицу продукции за единицу времени),

$K$ — стоимость размещения заказа.

Основываясь на этих определениях, вычислим компоненты функции затрат.

1. *Стоимость размещения заказов.* Приближенное число заказов в единицу времени равно $D/y$, так что стоимость размещения заказов в единицу времени равна $KD/y$.

2. *Ожидаемые затраты на хранение.* Средний уровень запаса равен

$$I=\frac{(y+M\{R-x\})+M\{R-x\}}{2}=\frac{y}{2}+R-M\{x\}.$$

Следовательно, ожидаемые затраты на хранение за единицу времени равны $hI$.

Приведенная формула получена в результате усреднения ожидаемых запасов в начале и конце временного цикла, т.е. величин $y+M\{R-x\}$ и $M\{R-x\}$ соответственно. При этом игнорируется случай, когда величина $R-M\{x\}$ может быть отрицательной, что является одним из упрощающих допущений рассматриваемой модели.

3. *Ожидаемые потери, связанные с неудовлетворенным спросом.* Дефицит возникает при $x>R$. Следовательно, ожидаемый дефицит за единицу времени равен

$$S=\int_R^{\infty}(x-R)f(x)dx.$$

Так как в модели предполагается, что $p$ пропорционально лишь объему дефицита, ожидаемые потери, связанные с неудовлетворенным спросом, за один цикл равны $pS$. Поскольку единица времени содержит $D/y$ циклов, то ожидаемые потери, обусловленные дефицитом, составляют $pDS/y$ за единицу времени.

Результирующая функция общих потерь за единицу времени $TCU$ имеет следующий вид.

$$TCU(y,R)=\frac{DK}{y}+h\left(\frac{y}{2}+R-M\{x\}\right)+\frac{pD}{y}\int_R^{\infty}(x-R)f(x)dx.$$

Оптимальные значения $y^*$ и $R^*$ определяются из представленных ниже уравнений.

$$\frac{\partial TCU}{\partial y}=-\left(\frac{DK}{y^2}\right)+\frac{h}{2}-\frac{pD}{y^2}S=0,$$

$$\frac{\partial TCU}{\partial R}=h-\left(\frac{pD}{y}\right)\int_R^{\infty}f(x)dx=0.$$

Следовательно, имеем

$$y^*=\sqrt{\frac{2D(K+pS)}{h}}, \qquad (1)$$

$$\int_{R^*}^{\infty}f(x)dx=\frac{hy^*}{pD}. \qquad (2)$$

Так как из уравнений (1) и (2) $y^*$ и $R^*$ нельзя определить в явном виде, для их нахождения используется численный алгоритм, предложенный Хедли и Уайтин (Hadley, Whitin) [1]. Доказано, что алгоритм сходится за конечное число итераций при условии, что допустимое решение существует.

При $R$=0 последние два уравнения соответственно дают следующее.

$$\bar{y}=\sqrt{\frac{2D(K+pM\{x\})}{h}},$$

$$\tilde{y}=\frac{pD}{h}.$$

Если $\tilde{y}\geq\bar{y}$, тогда существуют единственное оптимальные значения для $y$ и $R$. Вычислительная процедура определяет, что наименьшим значением $y^*$ является $\sqrt{2KD/h}$, которое достигается при $S$=0.

Алгоритм состоит из следующих шагов.

**Шаг** 0. Принимаем начальное решение $y_1=y^*=\sqrt{2KD/h}$ и считаем $R_0$=0. Полагаем $i$=1 и переходим к шагу $i$.

**Шаг i.** Используем значение $y_i$ для определения $R_i$ из уравнения (2). Если $R_i\approx R_{i-1}$, вычисления заканчиваются; оптимальным решением считаем $y^*=y_i$ и $R^*=R_i$. Иначе используем значение $R_i$ в уравнении (1) для вычисления $y_i$. Полагаем $i=i+1$ и повторяем шаг $i$.

**Пример 6**

Электротехническая компания использует в производственном процессе канифоль в количестве 1000 галлонов в месяц. Размещение заказа на новую поставку канифоли обходится фирме в 100 долларов. Стоимость хранения одного галлона канифоли на протяжении одного месяца равна 2 доллара, а удельные потери от ее дефицита — 10 долларов за один галлон. Статистические данные свидетельствуют о том, что спрос в период поставки является случайной величиной, равномерно распределенной от 0 до 100 галлонов. Определите оптимальную политику управления запасами для компании.

Используя принятые в модели обозначения, имеем следующее.

$D$ = 1000 галлонов в месяц,

$K$ = 100 долл. за размещение заказа,

$h = 2$ долл. за один галлон в месяц,

$p$=10 долл. за один галлон,

$f(x) = 1/100,\ 0\le x\le 100$,

$M\{x\}$=50 галлонов.

Сначала необходимо проверить, существует ли допустимое решение задачи. Используя уравнения для $\tilde{y}$ *и* $\bar{y}$, получаем следующее.

$$\bar{y} = \sqrt{\frac{2\times1000(100+10\times50)}{2}} = 774.6 \text{ галлонов},$$

$$\tilde{y} = \frac{10\times1000}{2} = 5000 \text{ галлонов.}$$

Так как $\tilde{y} \ge \bar{y}$, значит, существует единственное решение для $y^*$ и $R^*$. Выражение для $S$ записывается в следующем виде:

$$S = \int_R^{100} (x-R)\frac{1}{100}dx = \frac{R^2}{200} - R + 50.$$

Используя в уравнениях (1) и (2) выражение для S, получаем следующее.

$$y_i = \sqrt{\frac{2\times1000(100+10S)}{2}} = \sqrt{100000+10000S} \text{ галлонов,} \quad (3)$$

$$\int_{R_i}^{100} \frac{1}{100}dx = \frac{2y_i}{10\times1000}$$

Из последнего уравнения имеем

$$R_i = 100 - \frac{y_i}{50}. \quad (4)$$

Теперь используем уравнения (3) и (4) для нахождения решения.

*Итерация 1.*

$$y_1 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2\times1000\times100}{2}} = 316.23 \text{ галлонов},$$

$$R_1 = 100 - \frac{316.23}{50} = 93.68 \text{ галлонов.}$$

*Итерация 2.*

$$S = \frac{R_1^2}{200} - R_1 + 50 = 0.19971 \text{ галлонов.}$$

$$y_2 = \sqrt{100000+10000\times0.19971} = 319.37 \text{ галлонов.}$$

Следовательно,

$$R_2 = 100 - \frac{319.37}{50} = 93.612 \text{ галлонов.}$$

*Итерация 3.*

$$S = \frac{R_2^2}{200} - R_2 + 50 = 0.20399 \text{ галлонов.}$$

$$y_3 = \sqrt{100000 + 10000 \times 0.20399} = 319.44 \text{ галлонов.}$$

Следовательно,

$$R_3 = 100 - \frac{319.44}{50} = 93.611 \text{ галлонов.}$$

Так как значения $R_2$ и $R_3$ примерно одинаковы, приближенное оптимальное решение определяется значениями R*=93,61 галлонов, $y$*=319,4 галлонов.

Следовательно, оптимальное управление запасами состоит в размещении заказа примерно на 320 галлонов, как только запас уменьшается до 94 галлонов.

## *1.8. Стохастическая одноэтапная модель*

Одноэтапные модели управления запасами отражают ситуацию, когда для удовлетворения спроса в течение определенного периода продукция заказывается только один раз. Например, модный сезонный товар устаревает к концу сезона, и, следовательно, заказы на него могут не возобновляться. В данном разделе рассматривается два типа таких моделей: с учетом и без учета затрат на оформление заказов.

При изложении данного материала используются следующие обозначения.

$c$ — стоимость закупки (или производства) единицы продукции,

$K$ — стоимость размещения заказа,

$h$ — удельные затраты на хранение единицы продукции в течение рассматриваемого периода,

$p$ — удельные потери от неудовлетворенного спроса (на единицу продукции за рассматриваемый период),

$D$ — величина случайного спроса за рассматриваемый период,

$f(D)$ — плотность вероятности спроса за рассматриваемый период,

$y$— объем заказа,

$x$ — наличный запас продукта перед размещением заказа.

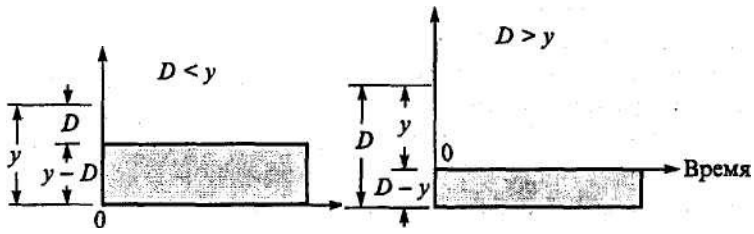
Модель определяет оптимальный объем заказа $y$, который минимизирует суммарные ожидаемые затраты, связанные с закупкой (или производством), хранением и неудовлетворенным спросом. При известном оптимальном значении $y$ (обозначается $y^*$) оптимальное управление запасами состоит в размещении заказа объемом $y^*–x$, если $x<y$; в противном случае заказ не размещается.

### *1.8.1. Модель при отсутствии затрат на оформление заказа*

В этой модели принято следующее.

1. Спрос удовлетворяется мгновенно в начале периода непосредственно после получения заказа.
2. Затраты на размещение заказа отсутствуют.

Рис. 6 иллюстрирует состояние запаса после удовлетворения спроса $D$. Если $D < y$, запас $y—D$ хранится на протяжении периода. Если же $D > y$, возникает дефицит объема $D—y$.




а б

*Рис. 6*

Ожидаемые затраты $M\{C(y)\}$ на период выражаются следующей формулой.

$$M\{C(y)\} = c(y-x) + h\int_0^y (y-D)f(D)dD + p\int_y^{\infty}(D-y)f(D)dD.$$

Можно показать, что функция $M\{C(y)\}$ является выпуклой по $y$ и, таким образом, имеет единственный минимум. Следовательно, вычисляя первую производную функции $M\{C(y)\}$ по $y$ и приравнивая её к нулю, получим

$$c + h\int_0^y f(D)dD - p\int_y^{\infty} f(D)dD = 0$$

или

$$c + hP\{D \le y\} + p(1 - P\{D \le y\}) = 0.$$

Отсюда имеем

$$P\{D \le y^*\} = \frac{p-c}{p+h}.$$

Правая часть последней формулы известна как **критическое отношение.** Значение $y^*$ определено только при условии, что критическое отношение неотрицательно, т.е. $p > c$. Случай, когда $p < c$, является бессмысленным, так как это предполагает, что стоимость закупки единицы продукции выше потери от неудовлетворенного спроса.

Ранее предполагалось, что спрос $D$ является непрерывной случайной величиной. Если же $D$ является дискретной величиной, то плотность распределения вероятностей *fiD)* определена лишь в дискретных точках и функция затрат определяется в соответствии с формулой

$$M\{C(y)\} = c(y-x) + h\sum_{D=0}^{y}(y-D)f(D) + p\sum_{D=y+1}^{\infty}(D-y)f(D).$$

Эти условия в данном случае являются достаточными, так как функция $M\{C(y)\}$ выпукла. Применение этих условий после некоторых алгебраических преобразований

$$M\{C(y-1)\} \ge M\{C(y)\} \text{ и } M\{C(y+1)\} \ge M\{C(y)\}.$$

Необходимыми условиями оптимальности являются неравенства

$$P\{D \le y^* - 1\} \le \frac{p-c}{p+h} \le P\{D \le y^*\}.$$

приводит к следующим неравенствам для определения $y^*$.

**Пример 7**

Владелец газетного киоска должен определить количество экземпляров газеты *USA Now,* которые должны быть в продаже в начале каждого дня. Он покупает экземпляр газеты за 30 центов, а продает за 75 центов. Продажа газеты обычно происходит с 7.00 до 8.00 часов утра. Оставшиеся к концу дня экземпляры газеты повторно выставляются для продажи по цене 5 центов за экземпляр. Сколько экземпляров газеты должен закупить владелец каждое утро, если дневной спрос описывается одним из следующих вероятностных распределений.

1. Нормальным распределением с математическим ожиданием 300 экземпляров и стандартным отклонением 20 экземпляров.
2. Дискретной плотностью распределения $f(D)$, заданной в виде следующей таблицы.

| $D$ | 200 | 220 | 300 | 320 | 340 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(D$ | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

Стоимости хранения и потери, обусловленные дефицитом, в этой ситуации не определены в явном виде. Однако данные задачи свидетельствуют о том, что каждый непроданный экземпляр газеты обходится владельцу в 30–5=25 центов и что потери, связанные с истощением запаса газет, равны 75 центов за экземпляр. Следовательно, в терминах, принятых в модели управления запасами, мы можем предполагать, что $c$=30 центов за экземпляр, $h$=25 центов за экземпляр, $p$=75 центов за экземпляр в день.

Сначала определяем критическое отношение

$$\frac{p-c}{p+h} = \frac{75-30}{75+25} = 0.45.$$

*Случай 1.*

Спрос $D$ распределен по нормальному закону N(300,20). Определим нормированную нормально распределенную случайную величину (с законом распределения $N(0,1)$)

$$z=\frac{D-300}{20}.$$

Из таблицы стандартного нормального распределения находим (см. Приложение Д)

$$P\{z<-0{,}125\}=0{,}45.$$

Тогда

$$\frac{y^{*}-300}{20}=-0.125\,.$$

Следовательно, оптимальный объем заказа равен $y^*$ = 297,5 (или примерно 298) экземпляров.

*1.8.2. Модель при наличии затрат на оформление заказа*

$$M\{\bar{C}(y)\}=K+M\{C(y)\}=K+c(y-x)+h\int_{0}^{y}(y-D)f(D)dD+p\int_{y}^{\infty}(D-y)f(D)dD.$$

Как показано в разделе 1.8.1, оптимальное значение $y$ должно удовлетворять соотношению

$$P\{y\le y^{*}\}=\frac{p-c}{p+h}.$$

Так как $K$ является константой, минимум величины $M\{C(y)\}$ также должен достигаться при У, как показано на рис. 7.

Рассматриваемая модель отличается от представленной в предыдущем разделе тем, что учитывается стоимость $K$ размещения заказа. Используя обозначения, введенные выше, получаем следующее выражение для суммарной ожидаемой стоимости.

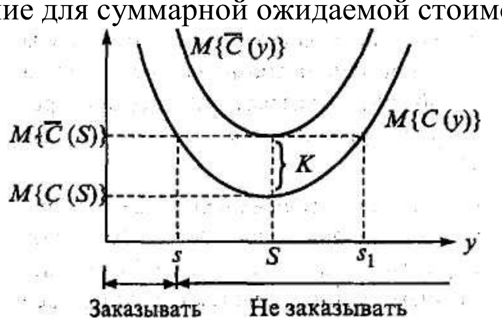



*Рис. 7*

На рис. 7 $S = y^*$ и величина $s$ (< $S$) определяются из уравнения

$$M\{C(s)\} = M\{C(S)\}=K+M\{C(S)\},\ s<S.$$

(Отметим, что это уравнение имеет и другое решение $s_1>S$, которое не рассматривается.)

Задача формулируется следующим образом. Какое количество продукции необходимо заказывать, если наличный запас перед размещением заказа составляет $x$ единиц? Ответ на этот вопрос рассматривается по отдельности при выполнении следующих условий.

1.$x<s$.

2.$s<x<S$.

3.$x>S$.

*Случай* 1 ($x < s$). Так как в наличии имеется $x$ единиц продукции, соответствующие издержки содержания запаса составляют $M\{C(x)\}$. Если заказывается любое дополнительное количество продукции $y$ ($y>x$), то соответствующие затраты при заданной величине $y$ равны величине $M\{C(y)\}$, которая учитывает стоимость $K$ размещения заказа. Из рис. 7 следует, что

$$min M\{C(y)\} = M\{C(S)\} < M\{C(x)\}.$$

Следовательно, оптимальной стратегией управления запасами в этом случае будет заказ в $S–x$ единиц.

*Случай* 2 ($s < x < S$). Из рис. 7 видно, что

$$M\{C(x)\}< min\ M\{C(y)\} = M\{C(S)\}.$$

Следовательно, в данном случае дополнительных затрат не возникает, если новый заказ *не размещается.* Поэтому $y^* = x$.

*Случай* 3 ($x>S$). Из рис. 7 видно, что при $y > x$

$$M\{C(x)\}<M\{C(y)\}.$$

Это неравенство показывает, что в данном случае экономнее будет не размещать заказ, т.е. $y^*=x$.

Описанная стратегия управления запасами, часто именуемая ($s$–$S$)-стратегией, определяется следующим правилом.

Если $x<s$, делать заказ объемом $S$-$x$, если $x>s$, заказывать не следует.

(Оптимальность ($s$–$S$)-стратегии следует из того, что соответствующая функция затрат является выпуклой. Если это свойство не выполняется, данная стратегия перестает быть оптимальной.)

**Пример 8**

Дневной спрос на продукцию в течение одного периода удовлетворяется мгновенно в начале периода, Спрос является случайной величиной, равномерно распределенной от 0 до 10 единиц. Стоимость хранения единицы продукции на протяжении периода равна 0,50 доллара, а штраф за дефицит единицы продукции — 4,50 доллара. Стоимость единицы продукции равна 0,50 доллара, стоимость размещения заказа — 25 долларов. Необходимо определить оптимальную стратегию заказа продукции.

Определим сначала $y$ . Имеем

$$\frac{p-c}{p+h}=\frac{4.5-0.5}{4.5+0.5}=0.8.$$

Так как

$$P\{D\le y^*\}=\int_0^{y^*}\frac{1}{10}dD=\frac{y^*}{10},$$

то $S=y^*=8$.

Ожидаемое значение функции затрат определяется следующим образом.

$$M\{C(y)\}=0.5(y-x)+0.5\int_0^y\frac{1}{10}(y-D)dD+4.5\int_y^{10}\frac{1}{10}(D-y)dD=$$

$$=0.5(y-x)+0.05\left[yD-\frac{D^2}{2}\right]_0^y+0.45\left[\frac{D^2}{2}-Dy\right]_y^{10}=0.25y^2-4y+22.5-0.5x.$$

Величина $S$ определяется из уравнения

$$M\{C(s)\}=K+M\{C(S)\}.$$

Отсюда получаем

$$0{,}25s^2-4s+22{,}5-0{,}5x=25+0{,}25S^2-45+22{,}5-0{,}5x.$$

При $S = 8$ это уравнение сводится к виду

$$s^2-16s-36=0.$$

Решением данного уравнения является $s$=–2 или $s$=18. Значение $s$=18 (превышающее $S$) следует отбросить. Так как оставшееся значение является отрицательным (= –2), то $s$ не имеет допустимого значения. Следовательно, оптимальной стратегией является отказ от размещения заказа (рис. 8). Такая ситуация обычно возникает тогда, когда функция затрат является "плоской" или когда затраты на размещение заказа превышают другие затраты модели.

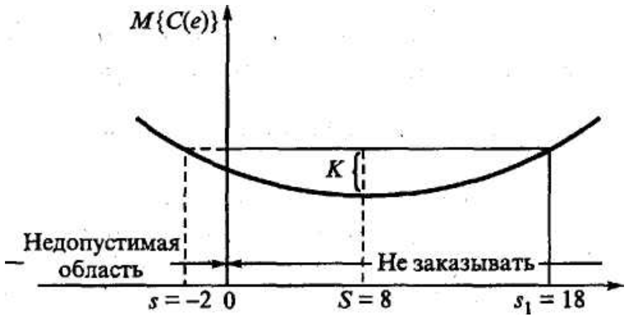



*Рис. 8*

### *1.9. Многоэтапные модели*

В этом разделе рассматривается многоэтапная модель в предположении, что не учитывается стоимость размещения заказа. Кроме того, в модели предусматривается возможность задолженности и нулевое время поставки. Предполагается также, что спрос $D$ в каждый период описывается стационарной (независящей от времени) плотностью вероятности $f(D)$.

В многоэтапной модели учитывается приведенная стоимость денег. Если а (< 1) — коэффициент дисконтирования (процент скидки) для одного этапа, то сумма $A$ спустя и этапов будет эквивалентна сумме $\alpha^n A$ в настоящий момент.

Предположим, что горизонт планирования охватывает $n$ этапов и неудовлетворенный спрос может оставаться таковым лишь на протяжении одного этапа. Пусть $F_i(x_i)$ — максимальная суммарная ожидаемая прибыль для этапов от / до и, определенная при условии, что $x_i$ — уровень имеющегося запаса перед размещением заказа на $i$–м этапе.

Используя обозначения из раздела 1.8 и предполагая, что $r$ — удельный доход от реализации единицы продукции, сформулируем задачу управления запасами в виде следующей задачи динамического программирования (см. главу 15).

$$F_i(x_i) = \max_{y_i \ge x_i}\Big\{-c(y_i - x_i) + \int_0^{y_i}\big[rD - h(y_i - D)\big]f(D)\,dD +$$
$$+\int_{y_i}^{\infty}\big[ry_i + \alpha r(D - y_i) - p(D - y_i)\big]f(D)\,dD +$$
$$+\alpha\int_0^{\infty}F_{i+1}(y_i - D)f(D)\,dD\Big\},\quad i = 1,2,\ldots,n,$$

где $F_{n+1}(y_n - D)\equiv 0$. Величина $x_i$ может принимать отрицательные значения, так как неудовлетворенный спрос может накапливаться. Величина $\alpha r(D\text{-}y_i)$ включена во второй интеграл, поскольку $D\text{-}y_i$ представляет собой неудовлетворенный спрос на $i$-*м* этапе, который должен быть удовлетворен на этапе $i$+1.

Задачу можно решить рекуррентно методами динамического программирования. Если число этапов является бесконечным (бесконечный горизонт планирования), приведенное выше рекуррентное уравнение сводится к Следующему.

$$F(x) = \max_{y \ge x}\Big\{-c(y - x) + \int_0^{y}\big[rD - h(y - D)\big]f(D)\,dD +$$
$$+\int_{y}^{\infty}\big[ry + \alpha r(D - y) - p(D - y)\big]f(D)\,dD +$$
$$+\alpha\int_0^{\infty}F(y - D)f(D)\,dD\Big\},$$

где $x$ *и* $y$ представляют собой уровни запаса на каждом этапе до и после получения заказа соответственно.

Оптимальное значение $y$ можно определить из приведенного ниже необходимого условия, которое в данном случае есть также достаточным, так как функция ожидаемой прибыли $F(x)$ является вогнутой.

$$\frac{\partial(.)}{\partial y}=-c-h\int_0^y f(D)dD+\int_y^\infty\left[(1-\alpha)r+p\right]f(D)dD+\alpha\int_0^\infty\frac{\partial F(y-D)}{\partial y}f(D)dD=0.$$

Величина

$$\frac{\partial F(y-D)}{\partial y}$$

определяется следующим образом. Если на начало следующего этапа уровень запаса еще составляет $\beta$ (> 0) единиц, то прибыль на этом этапе возрастает на величину $c\beta$, так как объем последующего заказа уменьшается именно на эту величину. Это означает, что

$$\frac{\partial F(y-D)}{\partial y}=c.$$

Следовательно, необходимое условие принимает вид

$$-c-h\int_0^y f(D)dD+\left[(1-\alpha)r+p\right]\left(1-\int_0^y f(D)dD\right)+\alpha c\int_0^\infty f(D)dD=0.$$

Поэтому оптимальный уровень заказа >>* определяется из уравнения

$$\int_0^{y^*} f(D)dD=\frac{p+(1-\alpha)(r-c)}{p+h+(1-\alpha)r}.$$

Оптимальная стратегия каждого этапа при заданном исходном запасе $x$ выражается следующим правилом.

Если $x < y^*$, делать заказ объемом $y^* - x$, если $x > y^*$, заказа не делать.

## 2. Задание на лабораторную работу

2.1. Изучить предлагаемые варианты задач.

2.2. В соответствии с вариантом задания, определенным преподавателем, составить схемы вычисления, реализующие метод, и найти решение.

2.3. Оформить отчет о выполнении задания с приведением условия задачи, схемы методов, результатов решения и заключения.

## 3. Варианты заданий

1. Ресторан заказывает мясной фарш в начале каждой недели для удовлетворения недельного спроса в 300 фунтов. Фиксированная стоимость размещения заказа равна 20 долларов. Стоимость замораживания и хранения одного фунта фарша обходится ресторану примерно в 0,03 доллара в день.
   a) Определите недельные затраты ресторана, связанные с существующей стратегией создания запаса.
   b) Определите оптимальную стратегию управления запасами в предположении, что время выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки равно нулю.
   c) Вычислите разность между текущими недельными затратами ресторана и теми, которые определяются оптимальной стратегией управления запасами.
2. Компания хранит на складе продукцию, которая потребляется с интенсивностью50 единиц в день. За размещение заказа компания каждый раз платит 20 долларов. Стоимость хранения единицы продукции на складе обходится в $0,35 в неделю.
   a) Определите оптимальную стратегию управления запасами, если предположить, что время выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки равно 1 неделе.
   b) Определите оптимальное количество заказов в течение года (считая, что год имеет 365 дней).
3. Отдел снабжения компании предложил две стратегии управления запасами.

*Стратегия 1.* Объем заказа 150 единиц при точке возобновления заказа в 50 единиц и времени выполнения заказа 10 дней.

*Стратегия 2.* Объем заказа 200 единиц при точке возобновления заказа в 75 единиц и времени выполнения заказа 15 дней.

Затраты на оформление заказа равны 20 долларов, а стоимость хранения единицы продукции на складе обходится в $0,02 в день.

a) Какую из двух стратегий следует утвердить?

b) Если бы вы отвечали за разработку стратегии управления запасами, какова была бы ваша рекомендация?

4. Магазин прессует и складывает в поддоны пустые картонные упаковочные коробки для их последующей переработки. За день штабелируется пять поддонов. Стоимость хранения одного поддона на заднем дворе магазина составляет 0,10 доллара в день. Компания, которая перевозит поддоны в перерабатывающий центр, устанавливает оплату в 100 долларов за аренду своего погрузочного оборудования плюс 3 доллара за перевозку каждого поддона. Изобразите графически изменение количества поддонов с течением времени и разработайте оптимальную стратегию доставки поддонов в перерабатывающий центр.

5. Отель использует внешнюю прачечную для стирки полотенец. За день в отеле накапливается 600 грязных полотенец. Прачечная забирает эти полотенца и заменяет их чистыми через постоянные промежутки времени. Стоимость однократной доставки полотенец в прачечную и обратно равна 81 доллар. Стирка одного полотенца обходится в $0.60. Стоимость хранения в отеле грязного и чистого полотенец равна $0.02 и $0.01 соответственно. Как часто следует отелю пользоваться службой доставки полотенец? (*Подсказка.* В этой задаче имеется два типа складируемых предметов. Если количество грязных полотенец возрастает, то количество чистых уменьшается с равной интенсивностью.)

6. Дана задача управления запасами, в которой склад пополняется равномерно (вместо мгновенного пополнения) с интенсивностью $a$. Продукция потребляется с интенсивностью $D$. Так как потребление происходит наряду с периодом пополнения, необходимо, чтобы было $a > D$. Стоимость размещения заказа равна $K$, а стоимость хранения единицы продукции в единицу времени — $h$. Покажите, что если $y$ — объем заказа и отсутствует дефицит, то

a) максимальный объем запаса равен $y(1 - D/a)$,

b) общие затраты в единицу времени при заданном $y$ равны

$$TCU(y) = \frac{KD}{y} + \frac{h}{2}\left(1 - \frac{D}{a}\right)y,$$

c) экономичный объем заказа равен

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h\left(1 - \frac{D}{a}\right)}}, \quad D < a,$$

d) формулу экономичного объема заказа при мгновенном пополнении запаса можно получить из формулы в п. c).

7. Фирма может производить изделие или покупать его у подрядчика. Если фирма сама выпускает изделие, то каждый запуск его в производство обходится в 20 долларов. Мощность производства составляет 100 единиц в день. Если изделие закупается, затраты на размещение каждого заказа равны 15 долларов. Затраты на содержание изделия на складе, независимо от того, закупается оно или производится на фирме, равны $0,02 в день. Потребление изделия фирмой оценивается в 260 000 единиц в год. Если предположить, что фирма работает без дефицита, определите, что выгоднее — закупать или производить изделия?

8. Предположим, что в упр. 6 допускается дефицит и удельные потери от него составляют $p$ долл. в единицу времени. Если $w$ — величина дефицита и $y$ — объем заказа, покажите, что имеют место следующие соотношения.

$$TCU(y,w)=\frac{KD}{y}+\frac{h\left\{y\left(1-\frac{D}{a}\right)-w\right\}^2+pw^2}{2\left(1-\frac{D}{a}\right)y},$$

$$y^*=\sqrt{\frac{2KD(p+h)}{ph\left(1-\frac{D}{a}\right)}},$$

$$w^*=\sqrt{\frac{2KDh\left(1-\frac{D}{a}\right)}{p(p+h)}}.$$

9. В условиях задачи 5 стоимость стирки одного грязного полотенца равна 0,60 доллара, но она может быть снижена до 0,50 доллара, если отель поставляет в прачечную по меньшей мере 2500 единиц полотенец. Следует ли отелю воспользоваться скидкой?

10. Продукция используется с интенсивностью 30 единиц в день. Стоимость хранения единицы продукции равна 0,05 доллара в день, стоимость размещения заказа составляет 100 долларов. Предположим, что дефицит продукции не допускается, стоимость закупки равна 10 долларов за единицу продукции, если объем закупки не превышает 500 единиц, и 8 долларов в противном случае. Определите оптимальную стратегию управления запасами при условии, что срок выполнения заказа равен 21 день.

11. Комплектующие продаются по 25 долларов за единицу, но предлагается 10% скидка при покупке партии от 150 единиц и выше. Компания в день использует 20единиц комплектующих. Стоимость размещения заказа равна 50 долларов, стоимость хранения единицы товара составляет 0,30 доллара в день. Следует ли компании воспользоваться скидкой? Определите пределы изменения скидки на цену комплектующих в процентах (предлагаемую за партию от 150 единиц и выше), при которых компания не получит никакой финансовой выгоды.

12. В модели управления запасами предположите, что стоимость хранения единицы товара в единицу времени равна $h_1$ если объем хранимого товара меньше $q$ единиц, и $h_2$ в противном случае, $h_1>h_2$. Покажите, как в этом случае можно определить экономичный размер партии хранимого товара.

13. Компания желает определить экономичный объем заказа для каждого из пяти видов продукции таким образом, чтобы выполнялось ограничение на площадь склада

| Продукция $i$ | $K_i$;($) | $D_i$, (единиц в день) | $h_i$,($) | $a_i$,(м$^2$) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 22 | 0,35 | 1,0 |
| 2 | 25 | 24 | 0,15 | 0,8 |
| 3 | 30 | 14 | 0,28 | 1,1 |
| 4 | 28 | 21 | 0,30 | 0,5 |
| 5 | 35 | 26 | 0,42 | 1,2 |

Общая площадь склада – 25 м$^2$. Определите оптимальный объем заказа.

14. Компания желает определить экономичный объем заказа для каждого из четырех видов продукции таким образом, чтобы суммарное количество заказов в год (365 дней) было не более 150.

| Продукция $i$ | $K_i$;($) | $D_i$, (единиц в день) | $h_i$,($) |
|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 10 | 0,1 |
| 2 | 50 | 20 | 0,2 |
| 3 | 90 | 5 | 0,2 |
| 4 | 20 | 10 | 0,1 |

15. Решите предыдущее упражнение в предположении, что единственным ограничением является денежная сумма в 10 000 долларов, которая может быть инвестирована

на приобретение запасов продукции. Стоимость закупки единицы продукции вида 1, 2, 3 и 4 равна соответственно 10, 5, 10 и 10 долларов.

16. Компания производит специальные вытяжки, которые используются в домашних каминах в период с декабря по март. В начале отопительного сезона спрос на эту продукцию низкий, в середине сезона он достигает своего пика и уменьшается к концу сезона. Учитывая популярность продукции, компания может использовать сверхурочные работы для удовлетворения спроса на свою продукцию. Следующая таблица содержит данные о производственных мощностях компании и объемах спроса на протяжении четырех месяцев.

| Месяц | Возможности производства | | Спрос(единицы) |
|---|---|---|---|
| | Обычный режим работы (единицы) | Сверхурочные (единицы) | |
| 1 | 90 | 50 | 100 |
| 2 | 100 | 60 | 190 |
| 3 | 120 | 80 | 210 |
| 4 | 110 | 70 | 160 |

Стоимость производства и хранения заданы следующими величинами

| Период $i$ | Стоимость единицы продукции при обычном режиме работы ($) | Стоимость единицы продукции при сверхурочном режиме ($) | Стоимость хранения единицы продукции до периода $i + 1$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5,00 | 7,50 | 0,10 |
| 2 | 3,00 | 4,50 | 0,15 |
| 3 | 4,00 | 6,00 | 0,12 |
| 4 | 1,00 | 1,50 | 0,20 |

Чтобы гарантировать допустимое решение при отсутствии дефицита, требуется, чтобы суммарное предложение продукции (возможности производства) к началу каждого месяца по меньшей мере равнялось суммарному спросу.

17. Изделие производится для удовлетворения заданного спроса на четырех временных этапах в соответствии со следующими данными.

| Диапазон объема производства (единицы) | Удельные производственные затраты на этапах ($) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1-3 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 4-11 | 1 | 4 | 5 | 4 |
| 12-15 | 2 | 4 | 7 | 5 |
| 16-25 | 5 | 6 | 10 | 7 |
| Затраты на хранение одного изделия до следующего этапа ($) | 0,30 | 0,35 | 0,20 | 0,25 |
| Суммарный спрос (единицы) | 11 | 4 | 17 | 29 |

a) Найдите оптимальное решение, определяющее количество изделий, которые необходимо изготовить на каждом из четырех этапов.

b) Предположим, что на этапе 4 требуется 10 дополнительных изделий. На каких этапах следует их изготовить?

18. В течение последующих пяти этапов спрос на некоторое изделие можно удовлетворить при обычном режиме работы, сверхурочных работах и субподряде. Субподряды можно использовать лишь при нехватке мощностей сверхурочных работ. Данные о производственных мощностях и объемах спроса приведены в следующей таблице.

| Этап | Производственные мощности (единицы) | | | Спрос |
|---|---|---|---|---|
| | Обычный режим работы | Сверхурочные работы | Субподряд | |
| 1 | 100 | 50 | 30 | 153 |
| 2 | 40 | 60 | 80 | 200 |
| 3 | 90 | 80 | 70 | 150 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 60 | 50 | 20 | 200 |
| 5 | 70 | 50 | 100 | 203 |

Предполагается, что затраты на производство единицы продукции на всех этапах одинаковы и составляют 4, 6 и 7 долларов при обычном режиме работы, сверхурочных работах и субподряде соответственно. Затраты на хранение единицы продукции на каждом этапе равны 0,50 доллара. Требуется найти оптимальное решение.

19. Найдите оптимальное решение следующей четырехэтапной задачи управления запасами.

| Период $i$ | Спрос, $D_i$ (единицы) | Затраты на оформление заказа, $K_i$ ($) | Затраты на хранение, $h_i$,($) |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 1 |
| 2 | 2 | 7 | 1 |
| 3 | 3 | 9 | 1 |
| 4 | 3 | 7 | 1 |

Затраты на приобретение первых шести единиц продукции составляют 1 доллар за каждую единицу и 2 доллара за каждую дополнительную единицу.

20. Решите следующую 10–этапную детерминированную задачу управления запасами, предполагая, что исходный запас – 50 единиц.

| Этап $i$ | Спрос, $D_i$ (единицы) | Стоимость единицы продукции, ($) | Затраты на хранение, $h_i$,($) | Затраты на оформление заказа, $K_i$ ($) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 150 | 6 | 1 | 100 |
| 2 | 100 | 6 | 1 | 100 |
| 3 | 20 | 4 | 2 | 100 |
| 4 | 40 | 4 | 1 | 200 |
| 5 | 70 | 6 | 2 | 200 |
| 6 | 90 | 8 | 3 | 200 |
| 7 | 130 | 4 | 1 | 300 |
| 8 | 180 | 4 | 4 | 300 |
| 9 | 140 | 2 | 2 | 300 |
| 10 | 50 | 6 | 1 | 300 |

21. Определите оптимальную стратегию управления запасами в следующей 5–этапной задаче. Стоимость единицы продукции равна 10 долл. Для любого периода. Стоимость хранения единицы продукции на протяжении периода равна 1 долл.

| Этап $i$ | Спрос, $D_i$ (единицы) | Затраты на оформление заказа, $K_i$ ($) |
|---|---|---|
| 1 | 50 | 80 |
| 2 | 70 | 7 |
| 3 | 100 | 60 |
| 4 | 30 | 80 |
| 5 | 60 | 60 |

22. Определите оптимальную стратегию управления запасами в следующей 6–этапной задаче. Стоимость единицы продукции равна 2 долл.

| Этап $i$ | $D_i$ (единицы) | $K_i$ (долл.) | $h_i$,(долл.) |
|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 20 | 1 |
| 2 | 15 | 17 | 1 |
| 3 | 7 | 10 | 1 |
| 4 | 20 | 18 | 3 |
| 5 | 13 | 5 | 1 |
| 6 | 25 | 50 | 1 |

23. Спрос на удилища достигает минимума в декабре, а максимума—в апреле. Компания, которая изготовляет удилища, оценивает декабрьский спрос на них в 50 единиц. Затем спрос увеличивается на 10 удилищ в месяц, достигая максимального значения 90 единиц в апреле. После этого объем спроса уменьшается на 5 удилищ в месяц. Стоимость размещения заказа на изготовление партии удилищ равна 250 долларов на протяжении всех месяцев, за исключением февраля, марта и апреля, когда она составляет 300 дол-

ларов. Стоимость производства одного удилища является примерно постоянной на протяжении всего года и составляет 15 долларов, а стоимость хранения одного удилища равна 1 доллару в месяц. Требуется составить план производства удилищ.

24. На протяжении последующих 12 месяцев небольшое издательство переиздает роман в целях удовлетворения спроса на него: 100, 120, 50, 70, 90, 105, 115, 95, 80,85, 100 и 110 экземпляров. Стоимость размещения заказа на переиздание равна200 долларов, а стоимость хранения книги на протяжении одного месяца — 1,20доллара. Определите план переиздания книги издательством.

25. Музыкальный магазин продает популярный компакт-диск. Распределение дневного спроса на диск можно аппроксимировать нормальным распределением с математическим ожиданием 200 дисков и стандартным отклонением 20 дисков. Стоимость хранения диска в магазине составляет 0.04 доллара за один день. Размещение нового заказа обходится магазину в 100 долларов. Поставщик обычно устанавливает семидневный срок для выполнения заказа. Предположим, что магазин хочет ограничить вероятность истощения запаса дисков на протяжении срока выполнения заказа величиной, не превышающей 0,02. Определите оптимальное управление запасами для магазина.

26. Дневной спрос на кинопленку в подарочном магазине курортной зоны является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием30 пленок и стандартным отклонением 5 пленок. Стоимость хранения катушки с пленкой в магазине составляет 0.02 доллара. Размещение нового заказа на кинопленку каждый раз обходится магазину в 30 долларов. Стратегия магазина по управлению запасами состоит в размещении заказа на 150 кинопленок, как только уровень запаса опускается до 80 единиц, тем самым поддерживается одновременно постоянный резерв в 20 кинопленок.

a) Для указанной стратегии магазина по управлению запасами определите вероятность истощения запаса на протяжении срока выполнения заказа.

b) Разработайте рекомендации для магазина относительно стратегии по управлению запасами, предполагая, что вероятность истощения запаса кинопленок на протяжении срока выполнения заказа не превышает 0,10.

27. Электротехническая компания использует в производственном процессе канифоль в количестве 1000 галлонов в месяц. Размещение заказа на новую поставку канифоли обходится фирме в 100 долларов. Стоимость хранения одного галлона канифоли на протяжении одного месяца равна 2 доллара, а удельные потери от ее дефицита — 10 долларов за один галлон. Решить задачу в предположении, что спрос в период выполнения заказа является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале [0, 50] (галлонов).

28. В предыдущей задаче предположим, что спрос в период поставки является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале [40,60](галлонов). Сравните решение, полученное при этих условиях, с решением, полученным ранее, и интерпретируйте результаты.

29. Найдите оптимальное решение задачи 27, если спрос в период поставки является нормально распределенной случайной величиной со средним 100галлонов и стандартным отклонением 2 галлона. Предположите также, что $D$ = 10000 галлонов в месяц, $h = 2$ доллара за галлон в месяц, $p$ = 4 доллара за галлон и $K$ = 20 долларов.

30. Покажите, что для одноэтапной модели с дискретной величиной спроса оптимальный объем заказа определяется из соотношения

$$P\{D \le y^* - 1\} \le \frac{p-c}{p+h} \le P\{D \le y^*\}.$$

31. Спрос на продукцию в течение единственного периода удовлетворяется мгновенно в начале периода. Соответствующая плотность распределения вероятностей является экспоненциальной со средним 10 единиц. В силу сложности оценки стоимостных параметров объем заказа определяется таким образом, что вероятность либо излишка, либо дефицита не превышает 0,1. Можно ли удовлетворить оба условия одновременно?

32. В одноэтапной модели управления запасами стоимость закупки единицы продукции равна 10 долларов, а стоимость ее хранения — 1 доллар. Найдите допустимую область значений удельных потерь от неудовлетворенного спроса в оптимальном случае, если объем заказа равен 4 единицы. Также предполагается, что спрос удовлетворяется мгновенно в начале периода и что плотность распределения величины спроса представляется следующей таблицей.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(D)$ | 0,05 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,25 | 0,15 | 0,05 | 0,05 | 0,05 |

33. Профессор Портер Стоун на своих лекциях по экономике учит студентов "играть" в фондовую биржу. Эта игра продолжается 10 дней; с самого начала предполагается, что стоимость избранных акций будет возрастать ежедневно на 1%. В любой день существует также вероятность, что биржа пойдет на убыль (снизятся котировки акций), о чем свидетельствуют данные следующей таблицы.

| День | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Процент снижения | 5,0 | 5,0 | 0,8 | 0,1 | 1,4 | 0,6 | 1,2 | 0,2 | 0,3 | 0,1 |
| Вероятность снижения | 0,06 | 0,02 | 0,05 | 0,07 | 0,10 | 0,13 | 0,15 | 0,20 | 0,12 | 0,10 |

Задача — максимизировать накопленную стоимость акций. Если бы вы были студентом профессора Стоуна, когда бы вы начали игру?

34. Книжный магазин университета предлагает ксерокопии конспектов лекций университетских профессоров. Профессор Ятаха читает лекции первокурсникам; на первый курс принимается от 200 до 250 студентов, причем ожидаемое количество первокурсников подчиняется равномерному распределению. Изготовление каждой копии обходится в 10 долларов, магазин продает их студентам по 25 долларов за копию. Студенты покупают конспекты в начале семестра. Каждая непроданная копия конспекта профессора Ятахи выставляется для продажи по частям. Между тем, если в магазине заканчиваются копии конспектов, дополнительные копии не печатаются и студенты сами заботятся о том, чтобы достать конспекты из других источников. Сколько копий конспектов лекций следует напечатать магазину, если он заинтересован в максимизации своих доходов?

35. Магазин быстрого обслуживания предлагает посетителям кофе и орехи с шести часов утра каждый день. Магазин покупает орехи по 7 центов за порцию, а продает по 25 центов за порцию до 8 часов утра. После этого времени орехи продаются по 5 центов за порцию. Число посетителей, которые ежедневно покупают орехи, является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале [30,50].Каждый посетитель обычно заказывает три порции орехов с кофе. Сколько примерно порций орехов следует закупать магазину каждое утро в целях максимизации своих доходов?

36. Магазин одежды создает запас теплых пальто для приближающейся зимы. Каждое пальто закупают по 50 долларов, а продают со 100%-ной наценкой. В конце сезона проводится распродажа и предлагается пальто по цене 55 долларов. Спрос на пальто в течение зимнего сезона является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале от 20 до 30. Так как зимний сезон является коротким, затраты на хранение в расчет не принимаются. Управляющий магазина считает также, что не будет потерь, вызванных дефицитом товара. Определите оптимальный объем заказа, который максимизирует доходы магазина.

37. Пусть в рамках одноэтапной модели спрос в течении периода меняется равномерно (а не удовлетворяется мгновенно в начале периода). Разработайте соответствующую стоимостную модель и определите оптимальный объем заказа.

38. Владелец газетного киоска должен определить количество экземпляров газеты *USA Now,* которые должны быть в продаже в начале каждого дня. Он покупает экземпляр газеты за 30 центов, а продает за 75 центов. Продажа газеты обычно происходит с 7.00 до 8.00 часов утра. Оставшиеся к концу дня экземпляры газеты повторно выставляются для

продажи по цене 5 центов за экземпляр. Сколько экземпляров газеты должен закупить владелец каждое утро, если дневной спрос непрерывен и равномерен в течение периода; плотность вероятности спроса является постоянной на интервале от 0 до 100.

39. Дана задача максимизации ожидаемой прибыли в рамках одноэтапной модели. Спрос удовлетворяется мгновенно в *конце* периода. Пусть $c$, $r$ и $v$ представляют соответственно стоимость покупки, цену продажи и цену распродажи единицы продукции. Предполагая, что спрос $D$ является непрерывным и описывается плотностью распределения вероятностей $f(D)$, постройте соответствующее выражение для суммарной ожидаемой прибыли и определите оптимальный объем заказа.

40. Дневной спрос на продукцию в течение одного периода удовлетворяется мгновенно в начале периода. Спрос является случайной величиной, равномерно распределенной от 0 до 10 единиц. Стоимость хранения единицы продукции на протяжении периода равна 0,50 доллара, а штраф за дефицит единицы продукции — 4,50 доллара. Стоимость единицы продукции равна 0,50 доллара, стоимость размещения заказа — 5 долларов. Необходимо определить оптимальную стратегию заказа продукции.

41. Пусть в одноэтапной модели, необходимо максимизировать прибыль, при этом следует учитывать стоимость размещения заказа $K$. Постройте выражение для ожидаемого значения прибыли и определите оптимальный объем заказа, используя при этом результаты расчетов одноэтапной модели и предполагая, что стоимость продажи единицы продукции равна $r$. Решите задачу при следующих данных: $r$ = \$3, $c$ = \$2, $p$ = \$4, $h$ = \$1 и $K$ = \$10. Плотность вероятности спроса является постоянной на интервале [0, 10].

42. Решите задачу 35 в предположении, что доставка орехов связана с постоянными затратами в 10 долларов.

43. Рассмотрим двухэтапную вероятностную модель управления запасами, в которой спрос накапливается, а заказы поступают с нулевым запаздыванием. Спрос в каждый период описывается постоянной плотностью вероятности на интервале от 0 до 10. Стоимостные параметры модели таковы:

цена продажи единицы продукции = \$2,
цена покупки единицы продукции = \$1,
стоимость хранения единицы продукции = \$0,10,
штраф за дефицит единицы продукции = \$3,
коэффициент дисконтирования = 0,8.

Определите оптимальную стратегию для двух этапов, предполагая, что начальный запас для первого периода равен нулю.

44. Плотность распределения величины спроса для каждого этапа в модели управления запасами при бесконечном горизонте планирования имеет вид $f(D)=0{,}08D$, $0 \le D \le 5$. Стоимостные параметры, отнесенные к единице продукции, следующие:

цена продажи = \$ 10,
цена покупки = \$8,
штраф за дефицит = \$ 1,
коэффициент дисконтирования = 0,9.

Определите оптимальную стратегию управления запасами в предположении, что заказы выполняются с нулевым запаздыванием и неудовлетворенный спрос накапливается.

45. Дана модель управления запасами при бесконечном горизонте планирования, в которой заказы выполняются с нулевым запаздыванием, а неудовлетворенный спрос накапливается. Определите оптимальную стратегию управления запасами, основанную на минимизации ожидаемых затрат, если

затраты на хранение $z$ единиц продукции = $hz^2$,
штраф за дефицит z единиц продукции = $pz^2$.

Покажите, что в частном случае, когда $h$-$p$, оптимальное решение не зависит от конкретного вида вероятностного распределения спроса.