МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ
ПРИБОРОСТРОЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра «Управления и моделирования систем» (ИТ–6)

Е.В. Никульчев, А.П. Хныкин

ПРИНЦИП ПАРЕТО

Методическое пособие по лабораторной работе
по дисциплине «Теория принятия решений»

Москва 1999

УДК 517.935:618.51

Никульчев Е.В., Хныкин А.П. ПРИНЦИП ПАРЕТО.– М.: МГАПИ, 1999 – 15 с.; ил.

РЕЦЕНЗЕНТ:
к.т.н., доцент **Моисеев А.А.**

Пособие одобрено на заседании кафедры ИТ-6 от « 4 » октября 1999 г., прокол № 2
Заведующий кафедрой ИТ-6 д.т.н., профессор Музыкин С.Н.

Рекомендуется к печати учебно–методической комиссией факультета ИТ по результатам обсуждения « 25 » октября 1999 г., протокол № 2

Общие указания

Работа выполняются на персональных компьютерах в операционной среде Windows с установленной программной средой Delphi.

Указания по технике безопасности совпадают с требованиями, предъявляемыми к пользователю ЭВМ. Другие опасные и вредные факторы отсутствуют.

Цель работы

Ознакомление с принципом Парето решения многокритериальных задач управления.

Краткие сведения из теории

1. Обзор методов решения многокритериальных задач, основанных на введении дополнительных гипотез

Пусть задана математическая модель исследуемой или проектируемой системы, и эта модель зависит от n параметров $x_1, ..., x_n$. Слова «задана математическая модель» означают, что имеются формулы (или готовые программы), позволяющие по заданному набору $x_1, ..., x_n$ вычислить любые интересующие нас характеристики системы. Сами $x_1, ..., x_n$ могут быть естественными физическими величинами, например, массами, радиусами и т.п., или быть безразмерными.

Пусть заданы целевые функции $J_1, ..., J_k$. Целевой функцией называется математическое выражение цели операции (математическая модель операции), позволяющее количественно оценить степень достижения этой цели. Не нарушая общности, будем считать, что задача состоит в отыскании минимумов $J_1, ..., J_k$, т.е.

$$J_i, \to \min, \quad i = \overline{1,k}\ .$$

Сформулировать математически задачу поиска оптимальной стратегии при принятии решения для реальной системы при наличии нескольких целевых функций сложно, т.к. часто при решении реальных задач цели противоречат друг другу.

Сталкиваясь с многокритериальными задачами естественно попытаться найти способы сведения их к обычным задачам с одним критерием, поскольку для однокритериальных задач, да еще с гладкой целевой функцией, существует хорошо разработанные методы решения. Эти способы, разумеется, должны носить неформальный характер, ибо они не могут быть получены как результат решения какой–либо математической задачи. Выше были рассмотрены несколько подобных способов, основанных на свертывании критериев, смысл которых очевиден: одна задача заменяется другой, причем в правомочности подобной замены и состояло содержание новых гипотез.

К анализу многокритериальных задач можно подойти и с других позиций: попытаться сократить множество исходных вариантов, т.е. исключить из анализа те решения, которые будут заведомо «плохи». Один из подобных путей был предложен итальянским экономистом В. Парето в 1904 году.

Предположим, что мы приняли какое–либо решение. Обозначим его через x^* и предположим, что существует некоторое другое решение $\hat{x}$ такое, что для всех критериев имеет место неравенства

$$J_i(\hat{x}) \le J_i(x^*), \qquad i = \overline{1,k}, \tag{1.6}$$

причем хотя бы одно из неравенств – строгое.

Очевидно, что выбор $\hat{x}$ предпочтительнее x^*. Поэтому все векторы x^*, удовлетворяющие (1.6), следует сразу исключить из рассмотрения. Имеет смысл заниматься сопоставлением, подвергать анализу только те векторы x^*, для которых не существует такого $\hat{x}$, что для всех критериев удовлетворяются неравенства (1.6). Множество всех таких значений x^* называют множеством Парето, а вектор x^* называют неулучшаемым вектором результатов (вектором Парето), если из (1.6) для любого i следует $J_i(\hat{x})=J_i(x^*)$.

Предположим, что цель определяется двумя однозначными функциями:

$$J_1(x) \to \min, \qquad J_2(x) \to \min.$$

Тогда каждому допустимому значению переменной x отвечает одна точка на плоскости (J_1, J_2) (рис. 1.1.) и равенства

$$J_1 = J_1(x), \qquad J_1 = J_2(x)$$

определяют параметрическое задание некоторой кривой *abcd* в этой плоскости. Но к множеству Парето можно отнести далеко не всю кривую. Так, участок *bc*, очевидно не принадлежит множеству Парето, поскольку вместе с ростом J_1 происходит рост J_2. Таким образом, на этом участке изменению переменной x отвечает одновременное увеличение обеих целевых функций, и, следовательно, такие варианты решений должны быть исключены из рассмотрения.

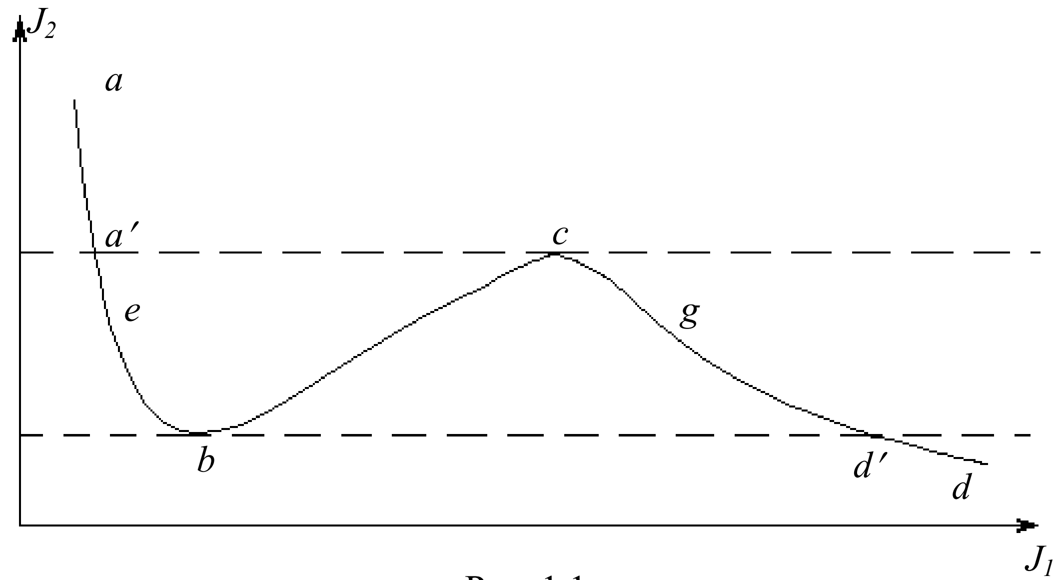

Рис. 1.1.

Из тех же соображений должен быть исключен участок cd', поскольку для каждой его точки g найдется точка e, принадлежащая участку $a'b$, в которой значение обоих критериев J_1 и J_2 меньше, чем в точке g. Значит, претендовать на принадлежность к множеству Парето могут только участки *ab* и $d'd$, причем точка d' должна быть исключена.

В теории принятия решений существует ***принцип Парето***, заключающийся в том, что выбирать в качестве решения следует только тот вектор x, который принадлежит множеству Парето.

Принцип Парето не выделяет единственного решения, он только сужает множество альтернатив.

Рассмотрим m-мерное пространство точек с декартовыми координатами $(J_1, ..., J_m)$. Каждая точка X пространства параметров отображается в точку $B=(J_1(X), ..., J_m(X))$ пространства критериев.

Среди всех точек X выделяют множество точек, для которых значение хотя бы одного критерия максимально. Это множество отображается в пространство критериев во множество паретовских точек. Очевидно, что паретовские точки расположены на границе множества возможных точек.

Множество Парето в двумерном пространстве критериев называют компромиссной кривой. Хотя, строго говоря, это не всегда кривая – она может состоять из несвязных кусков и содержать изолированные точки.

Простейший алгоритм нахождения множества Парето. Предположим, что мы получили конечное множество D_N, состоящее из q пробных точек A_i, и в этих точках известны все значения критериев. Пометим какую-либо точку A_{i_1} из D_N. Сравнивая ее со всеми остальными точками из D_N, исключим все точки A_j, которые безусловно хуже, чем A_{i_1}, то есть такие точки A_j, для которых при всех $J_v(A_{i_1}) \le J_v(A_j)$, $v = \overline{1,k}$, имеет место хотя бы одно строгое неравенство. Затем из оставшихся точек выберем непомеченную точку, например A_{i_2}, и пометим ее. Сравнивая ее со всеми остальными из D_N (включая A_{i_1}), исключим те из них, которые безусловно хуже, чем A_{i_2}, и т.д. После конечного числа шагов останутся только помеченные точки, соединяя которые получим так называемую приближенную компромиссную кривую.

Приближенная компромиссная кривая представляет собой совокупность отрезков, соединяющая попарно приблизительные паретовские точки. Если точная компромиссная кривая имеет разрывы, то при увеличении количества пробных точек можно обнаружить участки приближенной кривой, которые стремятся к вертикальным отрезкам, и приближенно оценить эти разрывы.

Несколько сложнее выделить участки, на которых компромиссная кривая не определена - для этого одних приближенно паретовских точек недостаточно. Лишь нанеся на график образы всех пробных точек, можно получить представление об области возможных значений критериев и догадаться, что на каком-то участке компромиссная кривая не существует.

Обнаружить данным методом изолированные точки, как правило, нельзя. Но на практике обычно используются не участки компромиссной кривой, а лишь полученные приближенно паретовские точки, которым всегда отвечают реальные приближенно эффективные варианты системы.

Пример 1.1. На рис. 1.2. показана точная и приближенная компромиссная кривая для двух целевых функции:

$$J_1 = x_1^2 + 4x_2^2, \qquad J_2 = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2$$

с учетом ограничения

$$|x_2 - x_1 - 0.375| \geq 0.125.$$

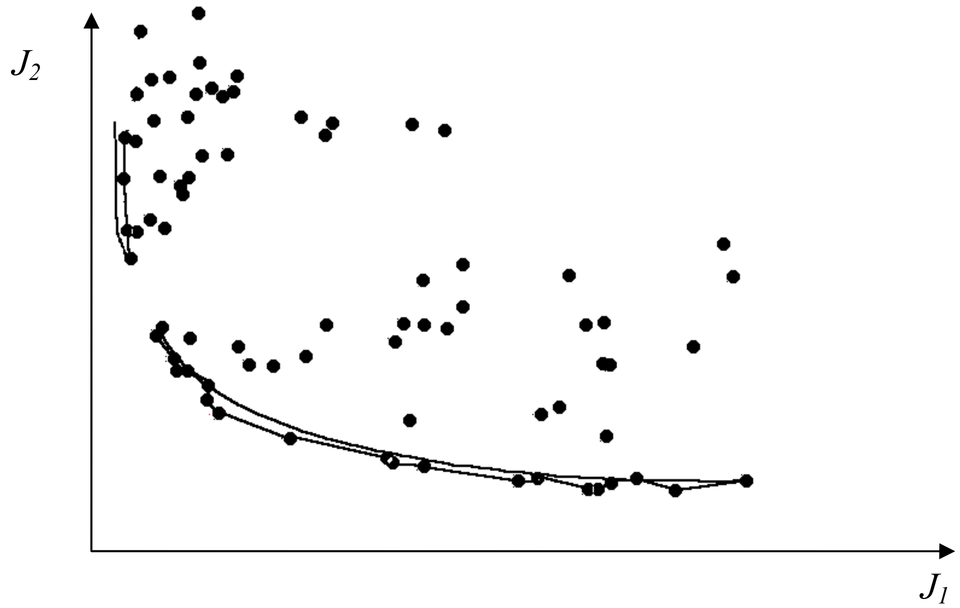

Рис. 1.2.

Постановка задачи

Рассматривается достаточно произвольная динамическая система, подверженную случайным возмущениям. Предположим, что известна некоторая расчетная траектория. Если линеаризовать уравнение движения в ее окрестности, то получается соотношение

$$q_t = q_{t-1} + \eta_{t-1} - u_t, \tag{3.1}$$

где q_{t-1} – отклонение положения объекта от расчетного, u_t– управление, η_{t-1} – случайное возмущение.

На практике обычно имеют дело с векторным вариантом модели (3.1), но часто можно независимо рассматривать отдельные параметры системы, каждый из которых описывается соотношением вида (3.1).

Будем считать, что мы «терпим убытки» от отклонения q_t от нуля и «несем расходы», зависящие от величины η_t. Таким образом можно определить два функционала качества:

$$\begin{gathered} J_1 = M^{\pi}\left[\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}q_t^2\right] \to \min, \\ J_2 = M^{\pi}\left[\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}u_t^2\right] \to \min, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где M^{π} – символ математического ожидания, π – стратегия управления, $\beta \in (0, 1)$ – коэффициент дисконтирования, отражающий уменьшение значимости отдаленных последствий принимаемых решений.

Как большинство векторных задач проблема (3.1-3.2) противоречива.

Предположим, что $\{\eta\}_{t=1}^{\infty}$ – семейство независимых в совокупности случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. Обозначим $s_t = q_t + \eta_t$ и будем считать, что выбирая управление u_t, мы знаем значения s_0, u_1, s_1, ..., s_{t-1}, u_{t-1}. Теперь управляемый случайный процесс x принимает стандартный вид

$$s_i = s_{t-1} - u_t + \eta_t, \tag{3.3}$$

Пространства состояний и управлений совпадают с $\mathbf{R}^1$.

Полагая начальное состояние $s_0 = x_0$ фиксированным, рассмотрим две задачи, считая заданной константу d:

1. Среди стратегий, для которых выполнено неравенство

$$J_1 = M^{\pi}\left[\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}u_t^2\right] \le d, \tag{3.4}$$

найти такую, которая минимизирует выражение

$$J_2 = M^{\pi}\left[\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}\left(q_{t-1} + \eta_{t-1} - u_t\right)^2\right] \to \min \tag{3.5}$$

2. Среди стратегий для которых выполнено неравенство

$$J_2 = M^{\pi}\left[\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}\left(q_{t-1} + \eta_{t-1} - u_t\right)^2\right] \le d \tag{3.6}$$

найти такую, которая минимизирует выражение

$$J_1 = M^{\pi}\left[\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}u_t^2\right] \to \min \tag{3.7}$$

Исходные данные

1. Динамическая система.
2. Функция распределение вероятностей случайного события, являющегося случайной помехой (наиболее часто встречающиеся распределения даны в Приложении 2).
3. Критериальные ограничения.
4. Расчетная (программная) траектория движения системы.

Выходные данные

1. Множество Парето.
2. График движения системы.
3. Функция управляющих воздействий.
4. Значения целевых функций на каждом шаге.

Последовательность выполнения

Решение задач 1 и 2, сформулированных ранее, без ограничений очевидны:

$$u_t = \psi^1(q_{t-1}, \eta_{t-1}) = q_{t-1} + \eta_{t-1}, \qquad u_t = \psi^0(q_{t-1}, \eta_{t-1}) \equiv 0$$

Используя динамическое программирование Беллмана, в [8] показано, что

$$J_2(\psi^1) = x_0 + \frac{\beta\sigma^2}{1-\beta}.$$

В случае $d \ge x_0^2 + \dfrac{\beta\sigma^2}{(1-\beta)^2}$ ограничение (3.4) несущественно: оно автоматически выполняется при решении (3.5) без ограничений. Аналогичным образом для задачи (3.7) ограничение (3.6) несущественно, если $d \ge \dfrac{x_0^2}{1-\beta} + \dfrac{\beta\sigma^2}{(1-\beta)^2}$.

Будем считать, что для задачи 1 выполнено неравенство

$$d < x_0^2 + \frac{\beta\sigma^2}{(1-\beta)^2},$$

а для задачи 2 –

$$d < \frac{x_0^2}{1-\beta} + \frac{\beta\sigma^2}{(1-\beta)^2},$$

кроме того, предполагается, что $d > 0$.

В двумерном пространстве критериев J_1, J_2 точки

$$\mathrm{A}\,(J_1, J_2) = \left(0,\ x_0^2 + \frac{\beta\sigma^2}{1-\beta}\right), \qquad \mathrm{B}\,(J_1, J_2) = \left(\frac{x_0^2}{1-\beta} + \frac{\beta\sigma^2}{1-\beta},\ 0\right)$$

будут являться крайними точками множества Парето.

Согласно п.1.2. и ввиду выпуклости функционалов, множество Парето будем искать в виде кривой, показанной на рис. 3.1.

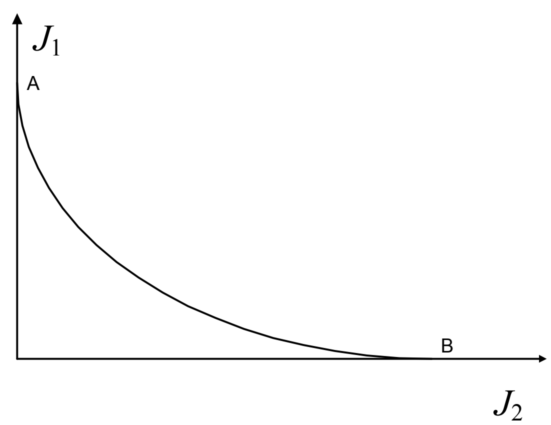

Рис. 3.1. Вид множества Парето для поставленной задачи.

Таким образом, общий алгоритм программы для решения задачи стабилизации стохастической системы можно представить в следующем виде (рис. 3.2.):

1. Задается начальное состояние системы $s_0 = x_0$.
2. На вход системы с датчика случайных чисел поступает значение случайной величины η.
3. Вычисляется значение параметра системы s_i, $i=1, 2, \ldots$
4. Происходит проверка на выход за границы d–окрестности траектории движения.
5. Если система находится внутри окрестности, то стабилизирующее воздействие не синтезируется, программа продолжает работать с шага 2.
6. Если система выходит за границы окрестности, то строится множество Парето и вычисляется корректирующее воздействие.
7. На вход системы поступает корректирующие воздействие, складывается со следующим случайным сигналом и программа продолжает работать с шага 2.
8. Программа работает заданное количество шагов.

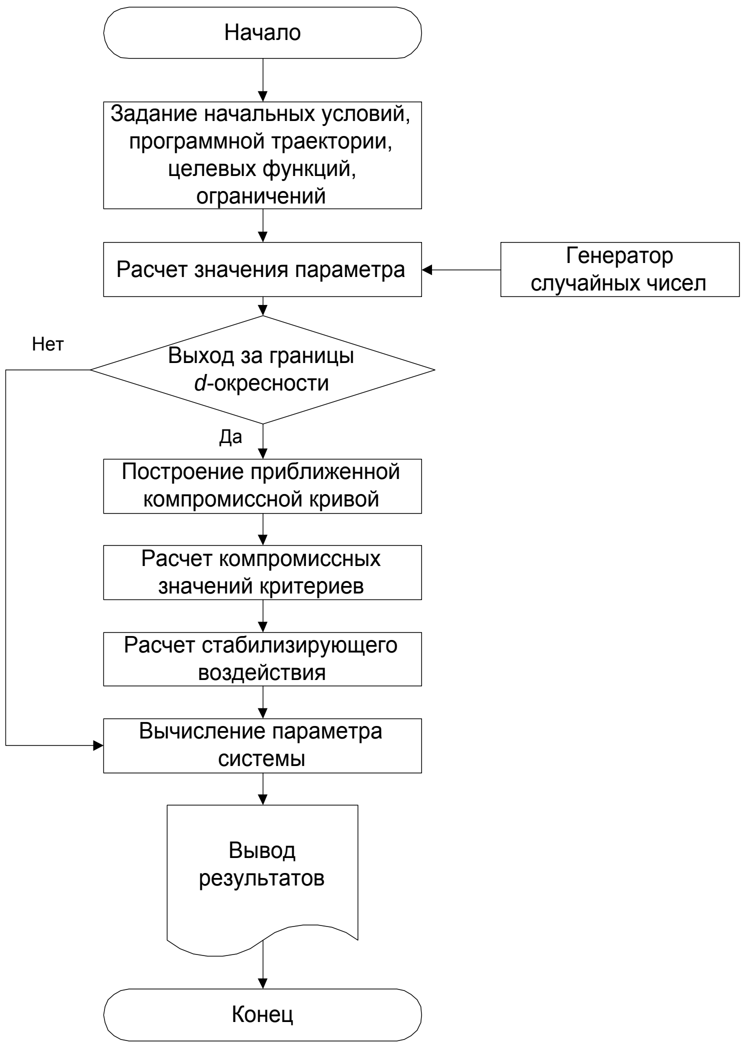

Рис. 3.2. Блок-схема общего алгоритма решения задачи.

Для данной задачи построения множество Парето строится в соответствии со следующим алгоритмом:

1. Вычисляются точки пересечения искомой выпуклой кривой с осями критериев J_1 и J_2:

$$\text{A}\ (J_1, J_2) = \left(0,\ x_0^2 + \frac{\beta\sigma^2}{1-\beta}\right), \qquad \text{B}\ (J_1, J_2) = \left(\frac{x_0^2}{1-\beta} + \frac{\beta\sigma^2}{1-\beta},\ 0\right)$$

2. Строится приближенная компромиссная кривая по точкам, найденным по алгоритму из п. 1.3.

3. Берется точка на кривой, координаты которой представляют собой компромиссные значения J_1 и J_2.
4. Вычисляется значение стабилизирующего воздействия и значение параметра системы используя выражения (3.3)–(3.7).

Если значение параметра системы не принадлежит заданной окрестности траектории, то управляющее воздействие берется из условия попадания системы в заданную окрестность.

Методический пример

На рис. 3.3. и 3.4. показаны примеры результатов работы программы стабилизации системы с внешними воздействиями, распределенными по логарифмически нормальному закону[1)]. В данном случае заданная траектория системы: $q(t) = 0$; $d = 100$.

На рис. 3.3. в моменты времени $t = 4$, $t = 19$ параметры системы выходят за границы d - окрестности. В этих случаях решается многокритериальная задача (3.1)– (3.2), строится множество Парето и синтезируется управляющее (стабилизирующее) воздействие.

Рис. 3.3. График параметров системы.

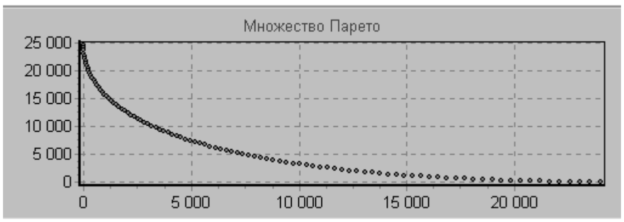

Рис. 3.4. Пример построения множества Парето.

Отчет по работе

Отчет по курсовому проекту оформляется на стандартных листах формата А4 в соответствии с требованиями СТП 20 68 757–2–88 «Проекты (работы) дипломные и курсовые».

Содержание отчета:

1. Титульный лист.
2. Исходные данные варианта.
3. Общая постановка задачи.
4. Краткое описание алгоритмов решения задачи.
5. Результаты в графическом и текстовом виде.
6. Анализ полученных результатов.
7. Текст программ.
8. Список используемых источников.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976
2. *Бусленко Н.П.* Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1968
3. *Грумондз В.Т.* Некоторые задачи анализа и выбора динамических характеристик нелинейных систем. – М.: МАИ, 1992
4. *Зубов С.В., Зубов Н.В.* Математические методы стабилизации динамических систем. – СПб.: СПб. Университет, 1996
5. *Купер Д., Макгиллем К.* Вероятностные методы анализа сигналов и систем. – М.: Мир, 1989
6. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. - М.: Наука, 1981
7. *Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в приложениях к анализу динамических систем. – М.: МАИ, 1997
8. *Пиуновский А.Б.* Многокритериальная модель оптимального управления стохастической линейной системой. //Автоматика и телемеханика, 1996, №6, с.76-90
9. *Соболь И.М., Статников Р.Б.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. - М.:Наука,1981