В.И. Бодров, Т.Я. Лазарева, Ю.Ф. Мартемьянов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ♦

Министерство образования Российской Федерации
Тамбовский государственный технический университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Тамбов
♦ Издательство ТГТУ ♦
2004

УДК 519.7(075)
ББК В183я73
Б75

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор технических наук, профессор ТГТУ
Ю.В. Литовка

Доктор физико-математических наук,
профессор ТГУ им. М. Державина
С.М. Дзюба

Бодров В.И., Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф.
Б75 Математические методы принятия решений: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2004. 124 с.
ISBN 5-8265-0259-2

Изложены основные методы, используемые в принятии решений экономического и технического плана, основными из которых являются классические методы, методы линейного и нелинейного программирования, динамическое программирование, игровые методы.

Учебное пособие предназначено для студентов 4 курса очного обучения специальности 351400 "Прикладная информатика (в экономике)", и студентов, обучающихся по направлению магистратуры 5502 "Автоматизация и управление".

УДК 519.7(075)
ББК В183я73

ISBN 5-8265-0259-2

Учебное издание

БОДРОВ Виталий Иванович
ЛАЗАРЕВА Татьяна Яковлевна
МАРТЕМЬЯНОВ Юрий Федорович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Редактор Т. М. Федченко
Инженер по компьютерному макетированию М. Н. Рыжкова

Подписано к печати 16.02.2004
Формат 60 × 84 / 16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Гарнитура Times New Roman. Объем: 7,21 усл. печ. л.; 7,19 уч.-изд. л.
Тираж 450 экз. С. 116

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

В тех случаях, когда объективной информации оказывается недостаточно для определения численных значений требуемого критерия при принятии решения, должны использоваться субъективные оценки, основанные на накопленном опыте, знаниях, идеях, мнениях и догадках специалистов, привлеченных к выработке субъективной оценки.

Получение объективных оценок базируется на следующих общих положениях:

1) ***аксиома несмещенности***, которая утверждает, что мнение большинства компетентно;
2) ***аксиома транзитивности***, утверждающая, что субъективные оценки транзитивны.

Из этого следует, что мерой качества субъективных оценок является их рассеяние.

Для качественного ознакомления с особенностями определения человеком субъективной оценки и формирования логической модели этого определения целесообразно рассмотреть ряд примеров.

Без сомнения известны методы оценки результатов в спортивных соревнованиях: гимнастике, прыжках в воду, фигурном катании и т.п. судьями-экспертами; оценки качества сортов вина, чая, духов и пр. специалистами-экспертами и т.д. Рассмотрим пример, принадлежащий Е.С. Вентцель [5].

Пусть требуется определить субъективную оценку (весовые коэффициенты) факторов $(T-\lambda_1)$ и $(C-\lambda_1)$ критерия некоторой испытательной системы, имеющей вид

$$E = \lambda_1 T + \lambda_2 C,$$

где T – время (длительность испытаний); C – стоимость испытаний; λ_1, λ_2 – весовые коэффициенты, определяющие влияние T и C на эффективность испытаний.

Можно ожидать, что λ_1 и λ_2 будут меняться в соответствии с обстановкой, в которой проходят испытания и степенью влияния ее на личность эксперта. Так, если судьба эксперта от успешности испытаний, то он будет считать, что $\lambda_1 \ll \lambda_2$, тогда для обеспечения испытаний будет закуплено большое количество оборудования, что резко увеличит их стоимость. Если непосредственной ответственности за испытания эксперт не несет, то результат оценки "веса" может быть другим.

Отсюда вытекает, что субъективная оценка подвержена влиянию конъюнктуры. Если эксперт в чем либо лично заинтересован или в данное время считается популярным определенное мнение, то экспертная оценка может отражать эту конъюнктуру. Кроме того, в процессе определения субъективной оценки могут вмешиваться те или иные авторитеты так, что оценка может быть деформирована за счет их влияния и появятся ошибки, если авторитет руководствуется предвзятым мнением. Способность эксперта противостоять воздействию конъюнктуры, назовем это объективностью, которая является одним из важнейших факторов, определяющих достоверность субъективной оценки.

В следующим примере предположим, что определение субъективной оценки *C* (см. рис. 1) поручается одному эксперту Э, который базируется при определении оценки на информации, полученной из двух независимых источников *A* и *B*.

Эксперт выдает оценку *C* только в том случае, когда оба источника дают одинаковую информацию.

Будем считать, что каждый источник информации обеспечивает возможность правильной оценки проблемы с вероятностью, равной 0,7. Эта вероятность обусловлена компетентностью эксперта и его информированностью о характере поставленной перед ним задачи.

Ограниченность компетентности и информированности, свойственная любому человеку, обуславливает возможность ошибки эксперта. Предположим, что он может ошибиться один раз из двухсот. Тогда вероятность правильного определения им субъективной оценки, обусловленная приведенными выше факторами, равна 0,995.

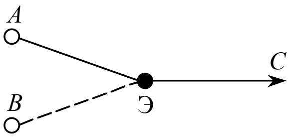


Рис. 1 Схема определения субъективной оценки при двух независимых источниках информации и одном эксперте:
A и *B* – независимые источники информации;
Э – эксперт; *C* – субъективная оценка

Отсюда общая вероятность правильности субъективной оценки, данной экспертом равна

$$P_1 = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}995 = 0{,}487\ ,$$

а вероятность выдачи им ошибочной оценки

$$P_2 = 1 - 0{,}487 = 0{,}513.$$

Таким образом, следующими важными факторами, определяющими правильность субъективной оценки, являются компетентность и информированность эксперта.

Следующий пример отличается от предыдущего только тем, что в нем определение оценки поручается четырем экспертам.

В данном случае для руководства действиями экспертов назначается лицо *a* (см. рис. 2), которое принимает решение *C*, соответствующее решениям экспертов в случае их единогласия.

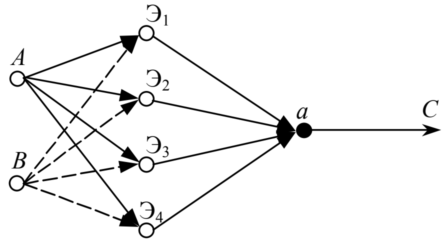
Простота функций руководителя позволяет считать, что вероятность его ошибки равна нулю. В этом случае вероятность получения ошибочной оценки (на основе одновременного принятия ошибочной оценки всеми экспертами) определяется как

$$P_2 = \left[1 - (1 - 0{,}3)^2 \cdot 0{,}995\right]^4 \approx 149 \cdot 10^{-6}.$$

Очевидно, что увеличение числа экспертов редко снижает вероятность принятия ошибочного решения и, следовательно, увеличение числа экспертов, придающее оценке статический характер и допускающее ее усреднение является важным фактором, определяющим правильность субъективной оценки. Таким образом лингвистическую модель определения субъективных оценок можно представить в виде

$$(A \wedge B \wedge C \wedge D) \rightarrow P,$$

Рис. 2 Схема определения субъективной оценки при двух независимых источниках информации и четырех экспертах:
A и B – независимые источники информации; $Э_1$, $Э_2$, $Э_3$, $Э_4$, $Э_5$ – эксперты; a – лицо, определяющее правило формирования субъективной оценки; C – субъективное решение



где A – информированность эксперта – совокупность представлений эксперта о задачах экспертизы, основывающаяся на внешней информации; B – компетентность эксперта – совокупность научных гипотез и конкретных идей относительно характера поведения и развития оцениваемой альтернативы; C – объективность эксперта – адекватность его представлений о факторах, определяющих характер и поведение объекта экспертизы, а также условие его развития; D – усредненность мнений эксперта, предусматривающая усреднение как по множеству экспертов, так и по множеству поставленных перед ним задач или по времени; P – имплицируемая указанными логическими предпосылками субъективная оценка.

Из вышеуказанной модели следует, что источниками ошибок при субъективной оценке могут быть:

– недостаточная информированность эксперта, связанная с неточностью формулировки задач экспертизы, неясностью и неоднозначностью используемой терминологии, недостаточной эффективностью предложенных шкал оценок; плохо составленной анкетой эксперта;

– недостаточная компетентность эксперта, определяемая слишком высокой степенью сложности задач, недостаточностью совокупности его научных гипотез и конкретных идей относительно характера и поведения объекта экспертизы, малой научной любознательностью;

– недостаточная объективность эксперта, вследствие нежелания участвовать в экспертизе, наличием прямой заинтересованности его в некоторых определенных результатах экспертизы; наличием морального давления на эксперта со стороны остановки или некоторых лиц; отсутствием материального стимулирования; отсутствием научного интереса и возможности повышения научной, технической либо иной квалификации эксперта в результате работы; большая трудоемкость заполнения анкет и т.п.;

– недостаточная усредненность мнений экспертов, связанная с ошибками анкетирования, построением процесса экспертизы; недостаточным количеством экспертов.

Таким образом, мерами для получения достоверных оценок является устранение вышеперечисленных источников ошибок. Методы реализации этих мер определяются ресурсами, находящимися в распоряжении лица, проводящего экспертизу (временем и средствами, отведенными на экспертизу, количеством экспертов и т.п.).

Формально любая экспертиза может быть разделена на три этапа: подготовка, проведение и обработка результатов.

Этап подготовки экспертизы имеет целью создание условий для получения объективных и точных оценок альтернатив. Он обычно включает в себя:

– определение задачи экспертизы;
– составление анкеты (вопросника), по которому будут опрашиваться эксперты;
– определение шкалы оценок, которой должны пользоваться эксперты;
– определение состава (списка) экспертов, привлекаемых к участию в экспертизе;
– определение порядка проведения экспертизы, показателей компетентности оценок (характеристики их точности) и метода обработки результатов.

Этап проведения экспертизы – имеет целью получение от экспертов конкретных оценок альтернатив, определенных анкетами опроса. Компетентность индивидуальных оценок обычно обеспечивается использованием митерационной процедуры с "обратной связью" на экспертов. В этом случае проведения экспертизы разделяется на несколько циклов опроса. Полученная информация, сообщаемая экспертам ("обратная связь" на экспертов) служит основанием для корректирования анкет опроса. Кроме того, эксперты могут ознакомиться с мнением своих коллег (возможна открытая дискуссия). Опрос повторяется на новом, более высоком информационном уровне. Объективность заключений достигается за счет независимости экспертов, их незаинтересованности в предмете экспертизы и отсутствия непосредственной связи между ними в ходе экспертизы. Опросы прекращаются, как только будут получены удовлетворительные значения показателей компетентности оценок.

Этап обработки результатов опроса имеет целью повышение компетентности оценки альтернативы за счет учета степени конкретной компетентности экспертов, психологических особенностей выработки индивидуальных оценок, а также социального и статистического характера процесса экспертизы. Учет компетентности эксперта может осуществляться методом "взвешивания" индивидуальных оценок.

Учет психологических особенностей выработки человеком субъективных оценок альтернатив при их разработке может базироваться на общих положениях теории полезности, учет социальных особенностей – на теоретических положениях группового выбора. Учет статистического характера оценок выливается в использование при их обработке в целях повышения компетентности метода усреднения.

Каждый из этих типов обработки субъективных оценок может быть реализован в соответствующей конкретной ситуации оценивания. Таких ситуаций может быть три:

– когда оценка должна быть дана одним человеком; в этом случае ее обработка проводится с использованием общих положений теории полезности;
– когда число привлеченных экспертов недостаточно для обеспечения статистической эффективности их оценок; в этом случае для получения групповой оценки следует базироваться на теории групповых решений;
– когда для формирования оценки может быть привлечено такое число экспертов, которое обеспечивает статистическую эффективность результатов экспертизы; в этом случае средством получения объективных оценок является их усреднение.

Методы усреднения и экспертиз детально описаны во многих литературных источниках, поэтому нет необходимости останавливаться на них подробно. Необходимо, однако, отметить, что использование усреднения оценок требует предварительного анализа причин, вызывающих нивелирования мнения отдельных экспертов. Усреднение не должно быть абсолютным, т.е. не должно приводить к сглаживанию индивидуальных оценок, именно того, что в них есть самостоятельного, основанного на индивидуальном опыте эксперта.

1 ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Вся наша жизнь пронизана проблемами. Каждый человек ежедневно сталкивается с необходимостью принятия решений. Их так много и принимают их так часто, что в большинстве случаев это просто не осознается. Только наиболее важные и трудные решения как-то выделяются и становятся предметом анализа. При этом основной подход всегда один: собирается точная, надежная и адекватная информация, а затем делается выбор среди возможных решений.

Принятие решений – это важная функция управления, являющаяся умением, которым должен овладеть каждый человек, работающий как в бизнесе так и науке.

Принятие неоптимальных решений в жизненных и производственных ситуациях уменьшает значительную долю возможностей и ресурсов. И чем сложнее ситуация, тем больше потери. Принятию решений необходимо учиться, и учит этому наука, называемая "Теория принятия решений", которая включает в себя комплекс знаний, содержащих изрядную долю математики.

1.1 КРАТКАЯ ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Научно-техническая революция привела к существенным преобразованиям в организационном управлении.

Усложнение технологии и укрупнение производств привело к необходимости применять различные математические расчеты при решении вопросов управления.

Совокупность математических дисциплин, относящихся к организационному управлению, составляют теорию принятия решений или теорию исследования операций.

Исследование операций как наука сформировалась и развилась в период второй мировой войны, хотя термин появился раньше – в 1939 году. Первые работы по теории принятия решений были связаны с организацией ПВО Великобритании и вообще с планированием операций по защите страны от вторжения.

После окончания войны специалисты-операционники (так называли специалистов в области исследования операций) стали увольняться из армии. К счастью, в этот период для развития промышленности потребовалось принимать не менее сложные решения, чем в военной области, и эти специалисты были затребованы для решения производственных, экономических задач. И наука "Исследование операций" продолжила свое бурное развитие.

Неразвитое производство, примером которого являются некоторые наши коммерческие фирмы, мало нуждается в решении задач планирования, принятия наилучших решений, так как решения очевидны. Применение системного подхода для лучшей организации дела в этом случае представляет большие сложности.

На развитом предприятии владелец или лицо, управляющее им, не может самостоятельно принять решения – слишком большое число вопросов надо рассмотреть. Поэтому возникают отделы: производственный, отдел сбыта, финансовый, отдел кадров и пр. Эти отделы имеют разные цели функционирования, во многом взаимно противоположные.

Производственный отдел хочет, чтобы продукция была однообразной (мало номенклатуры), и, если даже нет сбыта, этот отдел хочет производить продукцию, его цель – как можно больше продукции узкой номенклатуры (чтобы не перенастраивать станки для удешевления продукции).

Отдел сбыта требует широкой номенклатуры продукции (чтобы было легче продать), чтобы были товары, даже редко пользующиеся спросом (они могут понадобиться все равно). Поэтому этот отдел не возражает против запасов (если и производства нет). Однако, финансовый отдел выступает против запасов, так как это связанные деньги, и его задача минимизировать эти связанные деньги (т.е. деньги в товаре), а это значит минимизировать запасы. Финансовый отдел требует сохранения производства даже, если не идет продажа товара.

Отдел кадров против сохранения производства, если продажа товара не идет, так как это связано с увольнением людей, что является очень неприятной процедурой.

Задача отдела исследования заключается в том, чтобы найти правильное решение, которое принесет пользу (выгоду) всей системе в целом (всей фирме в целом), а не отдельным его подразделениям.

Таким образом, исследование операций связано с организацией, управлением системами, т.е. с исследованием оказания влияния на системы с точки зрения повышения их эффективности.

Наука, которая занимается управлением, называется кибернетикой. Теория операций – часть кибернетики. Иногда ее называют операционной кибернетикой.

Теория операций имеет синонимы: теория принятия решений, анализ операций, оценка операций, исследование операций, теория системной оценки, теория системных исследований, теория организационного управления. Наиболее часто используют названия теория операций, теория оптимальных решений, теория принятия решений.

Задачи этой теории можно разделить на классы: поисковые, распределенные, управления запасами, массового обслуживания, календарного планирования, состязательные задачи.

1.1 Классы и методы решения задач теории принятия решений

Классы задач	Методы решения
Поисковые	Нелинейное программирование
Распределенные	Линейное программирование
Управление запасами	Теория управления запасами
Массовое обслуживание	Теория массового обслуживания
Календарное планирование	Теория расписания
Состязательные задачи	Теория игр

Классы задач и методы их решения представлены в табл. 1.1.

1.2 ЭТАПЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Принятие решений не является каким-то обособленным, единовременным актом. Это процесс, протекающий во времени и состоящий из несколько этапов.

Любой процесс в природе – физический, химический, социальный, мыслительный и т.д., будучи предоставленный сам себе, развивается и протекает по некоторым присущим ему закономерностям. Но на этот процесс воздействуют другие процессы, также как и сам он воздействует на них в силу всеобщей связи явлений в природе, что приводит к отклонениям от первоначального развития рассматриваемого процесса, т.е. он протекает по более сложным закономерностям.

Все внешние воздействия подразделяются на случайные и управляющие. Случайные воздействия являются следствием взаимодействия рассматриваемых процессов, в то время как управляющие воздействия изменяют ход того процесса, на который они направлены, в желаемом направлении. В связи с этим должен существовать некоторый орган, систематически или по мере необходимости вырабатывающий управляющие воздействия. Такой орган принято называть системой управления.

В общем случае под системой понимают объективное единство закономерно связанных друг с другом предметов и явлений в природе и обществе. Характеристики такой системы определяются как характеристиками составляющих систему элементов, так и характеристиками взаимосвязей между ними.

Качество и эффективность работы системы оценивается критерием эффективности, который позволяет оценить достижение желаемой цели. Проблема принятия решений возникает только тогда, когда существуют затруднения в достижении необходимой цели.

В процессе принятия решений система управления должна располагать ресурсами, обеспечивающими реализацию выбранных управляющих воздействий. Так, в экономических системах решение, направленное на интенсификацию производства должно сопровождаться выделением дополнительных ресурсов – материальных, финансовых и т.д. Но система управления и сама затрачивает некоторые ресурсы, процесс выбора решения из множества возможных также связан с определенными затратами.

Ранние теории по принятию решений были основаны на концепции "экономического человека", основным положением которого было то, что все люди знают альтернативы, имеющиеся в данной ситуации, и все последствия, которые они вызовут. Теория экономического человека предполагает, что люди будут вести себя рационально, т.е. выбор будет делаться таким образом, чтобы максимизировать какую-либо ценность. Естественно, что лицо, принимающее решение не всегда ведет себя рациональным образом, поэтому в теорию экономического человека был внесен принцип ограниченной рациональности: "Возможности человеческого ума в формулировании и решении сложных проблем весьма малы по сравнению с размерами проблем. Очень трудно достичь объективно рационального поведения в реальном мире или даже разумного приближения к такой объективной рациональности".

Процесс принятия решения начинается с осознания того состояния или ситуации, в которой находится принимающий решение человек. Этот первый начальный этап можно считать в определенном смысле предварительным, предшествующим процессу решения. Здесь выявляется удовлетворенность или неудовлетворенность тем состоянием, в котором находится система.

На втором этапе формируется желание изменить или сохранить существующее состояние системы определенным образом, т.е. устанавливается цель принятия решения.

Третий этап заключается в определении всех возможных способов или путей достижения цели, перехода в желаемое состояние. Здесь важно в минимальной степени обеспечить полноту возможных решений вплоть до их избыточности. Впоследствии лучше исключить непривлекательное решение, чем пропустить эффективное.

Четвертый этап заключается в выборе из множества возможных решений эффективного, в смысле достижения желаемой цели, с соблюдением при этом некоторых правил выбора. Результатом именно этого этапа является единственное принятое решение. Этот этап является центральным, но он не возможен без первых трех.

Весь процесс принятия решения завершает пятый этап – реализация принятого решения.

Процесс принятия решения можно условно представить схемой, изображенной на рис. 1.1.

1.3 ОБЩИЕ ПОДХОДЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Процесс принятия решения развивается по спирали. Первой стадией является предварительное принятие решения, которое аналогично процессу планирования. Следующей стадией является превентивное разрешение проблем – это процесс предвосхищения ситуаций сбоя. И последней стадией является процесс разрешения проблемы, который и позволяет принять окончательное решение.

Проблема – это различия между тем, что должно происходить, и тем, что происходит на самом деле, поэтому она должна быть четко сформулирована. Для разрешения проблемы может быть предложен следующий подход, основными этапами которого являются:

1) формулирование проблемы;
2) анализ настоящего состояния дел;
3) формулирование цели;
4) анализ возможных причин нежелательной ситуации;
5) выбор основной причины критической ситуации;
6) определение альтернативных решений;
7) анализ альтернативных решений;
8) принятие решения;
9) составление плана действий.

При выборе окончательного решения из множества альтернативных необходимо обратить внимание на психологические аспекты принятия решения, постараться извлечь пользу для достижения личных целей, используя систематический подход, делая акцент на конкретность и ясность поставленных целей.

В настоящее время для принятия решения используется научный подход, который заключается в построении математической модели управляемой системы и последующем ее анализе. Как видно из рис. 1.1, эта модель занимает центральное место.

Современным научным методом изучения сложных систем является системный анализ, под которым понимается всестороннее, систематизированное, т.е. построенное на основе определенного набора правил, изучение сложного объекта в целом, вместе со всей совокупностью его сложных внешних и внутренних связей, проводимое для выяснения возможностей улучшения функционирования этого объекта.

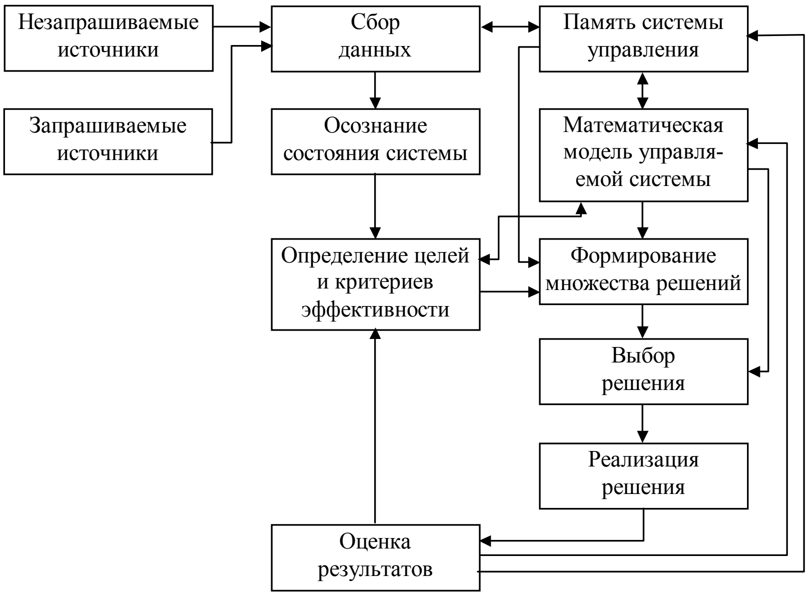


Рис. 1.1 Схема принятия решения

Укрупненный системный анализ состоит из этапов постановки задачи, структуризации системы, построения и исследования модели. Так как не все перечисленные этапы имеют формальный аппарат, то, следовательно, на современном уровне системный анализ не является строгим научным методом, некоторые этапы и задачи выполняются на содержательном уровне, на основе логики, здравого смысла, инженерного опыта и интуиции.

В подходе анализа систем и исследования операций можно выделить следующие пять логических элементов:

- цель или совокупность целей;
- альтернативные средства, при помощи которых можно достичь цели;
- ресурсы, необходимые при использовании каждой системы;
- математическую модель при подходе исследования операций или логическую модель при подходе анализа систем;
- критерий выбора предпочитаемой альтернативы.

Наиболее известными подходами при принятии решений являются следующие.

- Эмпирический подход, согласно которому решения могут существовать независимо от конкретных ситуаций. Решения, которые были хороши, могут быть плохи в настоящем времени. Данный подход позволяет изучать методы принятия решений отдельными личностями, накопить определенный опыт.
- Подход с точки зрения поведения человека. При принятии того или иного решения должны воедино соединиться существующие и разрабатываемые теории, методы и методика наук о поведении, основанные на здравом смысле понимания людей. Этот подход концентрируется на человеческом аспекте управления – принятия решений. Лицо, принимающее решения, должно сочетать качества ученого и руководителя и поддерживать равновесие между ними с помощью здравого смысла.
- Подход с точки зрения социальной системы. При управлении необходимо знать не только индивидуальные аспекты, но и понимать динамику работы группы, рассматривая последнюю с позиции системного подхода, рассматривая отношения и взаимные зависимости разных подзадач в общей задаче. Существуют два типа систем: закрытые, которые не приспосабливаются и не взаимодействуют с окружающей средой, и открытые, которые постоянно взаимодействуют с окружающей средой. Системы позволяют сохранить общую картину, взаимодействие, но в то же время такой подход не являются всеобъемлющим методом объединения разных частей в единое целое. Объединяющими факторами являются ум, рассудительность, а также мастерство.
- Подход с точки зрения принятия решения. Он, в основном, ориентируется на системы и позволяет научно описать, рассчитать каждый фактор, которым можно управлять. Однако, существуют решения, которые не могут быть определены качественно и которые нельзя изложить в терминах экономической ценности, например, эстетические решения.

- Математический подход, который позволяет дать большой эффект. Математика является инструментом для управления, для принятия решений.
- Операционный подход стремится оценить управленческую операцию и использовать любую информацию или теоретические знания, которые дадут наилучшие результаты.

Задачу управления можно рассчитать в трех аспектах: производство, человеческие отношения, администрация.

Одним из универсальных средств решения любых проблем в настоящее время являются математические модели. В исследовании операций модели описывают поведение систем, включающие во многих случаях в себя коллективы людей, которые ведут себя определенным рациональным образом и могут быть адекватно описаны. Критерий сравнения альтернатив, называемый также критерием оптимизации или целевой функцией, рассматривается как единственный и очевидный.

При принятии решений необходимо решить ту или иную проблему. Все существующие проблемы подразделяются на три класса:

1) хорошо структурированные или количественно сформулированные проблемы, в которых получают численные оценки;
2) неструктурированные или качественно выраженные проблемы, в которых количественные зависимости между признаками и характеристиками совершенно неизвестны;
3) слабо структурированные или смешанные проблемы, содержащие как количественные, так и качественные элементы, причем последние имеют тенденцию к доминированию.

Методы исследования операций предназначены для хорошо структурированных проблем. Эти методы позволяют принять обоснованное решение в той или иной задаче в зависимости от ее постановки.

1.4 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

При решении задачи принятия решения исследуется система, которая условно изображается прямоугольником, рис. 1.2.

Определение системы уже было дано. В дальнейшем под системой будем понимать совокупность объектов, предприятий, характеризующихся некоторыми показателями. Все эти показатели или параметры подразделяются прежде всего на входные и выходные.

Выходные показатели y_i графически обозначаются стрелками, выходящими из прямоугольника – системы (рис. 1.2, *б*); к ним относятся такие показатели, как, например, качество продукта, себестоимость, производительность, количество и др.

Параметры, которые можно изменить в соответствии с нашим желанием, обозначаются u_1, u_2, ..., u_m (рис. 1.2, *б*) и называются входными воздействиями. Такими параметрами могут быть количество финансовых средств, которые вкладываются в то или иное производство, оборудование, поставляемое в тот или иной цех, людские ресурсы и т.п. Входные параметры являются "рулями", которыми управляют, изменяя их значение, соответственно изменяются и выходные параметры y_i.

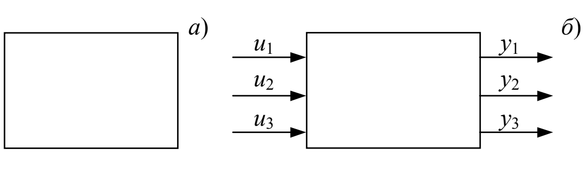


Рис. 1.2 Система:
а – исследуемая;
б – с входными и выходными параметрами

Выбор тех или иных величин u_i и является решением задачи принятия решений.

Если принято решение, следовательно, определены значения выходных параметров y_i , и в этом случае говорят, что система перешла в некоторое новое состояние.

Оператор, отражающий зависимость выходных параметров y от входных управляющих параметров u, называется моделью

$$y = f(u). \tag{1.1}$$

Математическая модель представляет собой математическую зависимость, позволяющую без экспериментов, зная управляющие воздействия, определить выходные параметры. Использование моделей очень удобно, так как не всегда можно провести эксперименты, при их проведении можно даже разорить предприятие, однако, имея модель, можно проиграть различные ситуации на ней.

После того как принято решение, хорошее или плохое, его необходимо охарактеризовать численно. Для этого вводится целевая функция, позволяющая численно оценить насколько принятое решение хорошо. Эта функция зависит от входных и выходных параметров и обозначается $Q = Q(u, y)$.

Так как выходные параметры y можно выразить через входные u, что часто и делают, то тогда целевая функция будет зависеть только от управляющих показателей – $Q = Q(u)$. И задача заключается в нахождении таких управлений u (или таких решений u), при которых целевая функция достигала бы своего минимального (максимального) значения.

Например, целевой функцией является прибыль – требуется, чтобы она была максимальной, если целевая функция представляет собой себестоимость, то необходимо, чтобы она была минимальной.

В конкретных задачах часто накладываются ограничения, например, требуют, чтобы при нахождении максимума целевой функции себестоимость была бы не выше заданной, количество товара по каждой номенклатуре также было бы не меньше заданного и т.д.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти такое решение, при котором целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение и удовлетворяются все ограничения экономического, технологического планов, которые принято записывать в виде $\varphi_i(u) \le 0,\ i = \overline{1, k}$.

Принимая различные решения, вычисляют в соответствии с ними по модели (1.1) значения выходной переменной y, а затем целевой функции Q. После этого среди всех принятых решений ищется такое решение u, при котором значение Q будет наилучшим. Варьировать значениями управляющей переменной u можно только в определенных пределах. Например, денежный вклад должен быть, с одной стороны, больше нуля, а, с другой стороны, меньше некоторого предельного значения, определяемого финансовыми возможностями конкретного лица, т.е. $0 \le u_i \le u_i^{\text{пред}}$, или, если U – область допустимых значений варьируемых управлений u_i, то $u_i \in U$.

Таким образом, задача заключается в том, чтобы найти такие управления из области допустимых U, при которых будут выполнены технологические ограничения, а целевая функция примет минимальное значение. Математически данная задача записывается следующим образом: требуется принять такое решение u^*, принадлежащее области допустимых решений, $u^* \in U$, при котором целевая функция достигает своего минимального значения.

$$Q(u^*) = \min_{u \in U} Q(u,\ y)$$

и выполняются связи, определяемые математической моделью $y = f(u)$, а также ограничения в виде неравенств $\varphi_i(u) \le 0,\ i = \overline{1, k}$, которыми задаются технологические ограничения.

В некоторых задачах связи могут отсутствовать, тогда требуется найти такое $u^* \in U$, что $Q(u^*) = \min_{u \in U} Q(u)$, при выполнении ограничения $\varphi_i(u) \le 0,\ i = \overline{1, k}$.

Управляющие переменные, удовлетворяющие требованиям $u \in U$ и $\varphi_i(u) \le 0$, называются допустимым решением. Все остальные решения недопустимы.

Допустимые решения u^*, при котором целевая функция минимальна, называется оптимальным решением.

Основной задачей теории принятия решения является нахождение оптимального решения. Для этого необходимо: построить модель

$y = f(u)$, определить целевую функцию $Q(y, u)$, определить область допустимых управлений U, определить технологические ограничения.

На практике встречаются задачи нахождения не оптимального, а допустимого решения, т.е. решения, удовлетворяющего системе ограничений. В этом случае задача ставится следующим образом: найти такие $u^* \in U$, при которых $\varphi_i(u) \le 0$, $i = \overline{1, k}$. Такие задачи могут иметь не единственное решение.

Некоторые задачи теории принятия решения пассивны, для них характерно, что входные управляющие параметры u не влияют на целевую функцию, они не являются рулями. В таких задачах только проверяют допустима полученная система или нет, и решением является "да" или "нет". Если $y = f(u)$, то проверяется $y \in Y$, и задача заключается в том, чтобы по построенной модели проверить при всех ли u показатели y хорошие, и на основании этого сделать вывод о пригодности системы или ее непригодности.

Для решения всех перечисленных задач применяют различные методы, которые и рассмотрим далее.

2 КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Математическая формулировка задачи принятия решения часто эквивалентна задаче отыскания экстремума функции одной или многих переменных. Поэтому для решения подобных задач могут быть использованы различные методы исследования функций классического анализа, в частности, методы поиска экстремума. Эти методы применяют в тех случаях, когда известен аналитический вид зависимости оптимизируемой функции Q от независимых переменных u_i.

2.1 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Большинство простейших задач принятия решений эквивалентно задачам отыскания экстремума функции одной переменной.

Пусть требуется найти экстремум функции одной переменной $Q(u)$ при отсутствии ограничений на диапазон изменения переменной u.

Необходимым условием существования экстремума непрерывной функции $Q(u)$ является равенство нулю первой производной ($dQ / du = 0$) или ее отсутствие. Графически равенство нулю производной означает, что касательная к кривой $Q(u)$ в этой точке параллельна оси абсцисс (рис. 2.1, *а*), на рис. 2.1, *б* изображен случай, когда производные в точках экстремума не существуют.

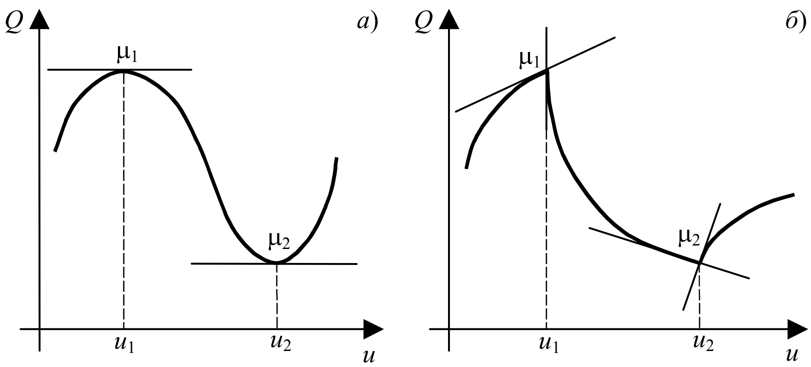


Рис. 2.1 Различные типы экстремума функции одной переменной:
а – производная в точке экстремума существует;
б – производная в точке экстремума не существует

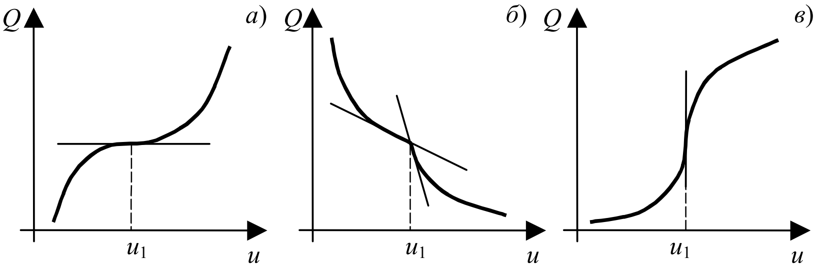


Рис. 2.2 Функции $Q(u)$, удовлетворяющие необходимым условиям экстремума:
а – производная равна нулю; *б* – производная не существует;

в – производная равна бесконечности

Названные условия являются лишь необходимыми условиями. Их выполнение не означает еще, что в данных точках функция имеет экстремум (рис. 2.2).

Для того, чтобы определить, действительно ли в исследуемой точке существует экстремум, необходимо проверить выполнение достаточных условий одним из методов, приведенных ниже.

1 Сравнение значений функций. Этот способ сводится к определению значений функции в точках, расположенных слева и справа в достаточной близости от исследуемой точки, т.е. в точках $(u_1 - \varepsilon)$, $(u_1 + \varepsilon)$, где ε – малая положительная величина. Если $Q(u_1) > Q(u_1 - \varepsilon)$ и $Q(u_1) > Q(u_1 + \varepsilon)$, то в точке u_1 существует максимум (рис. 2.3). Если $Q(u_1) < Q(u_1 - \varepsilon)$ и $Q(u_1) < Q(u_1 + \varepsilon)$, то в точке u_1 существует минимум (рис. 2.3, *б*). Если же $Q(u_1)$ будет занимать промежуточное положение между $Q(u_1 - \varepsilon)$ и $Q(u_1 + \varepsilon)$, например, $Q(u_1) > Q(u_1 - \varepsilon)$ и $Q(u_1) < Q(u_1 - \varepsilon)$, то в точке u_1 экстремума не будет (рис. 2.3, *в*).

2 Сравнение знаков производной. При этом способе определяется знак первой производной функции $Q(u) - \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}$ в точках $(u_1 - \varepsilon)$ и $(u_1 + \varepsilon)$. Если знаки производных различны, то в точке u_1 имеется экстремум функции $Q(u)$, причем, если при переходе от точки $(u_1 - \varepsilon)$ к точке $(u_1 + \varepsilon)$ знак производной изменяется с "+" на "–", то в точке u_1 – максимум (рис. 2.3, *а*). Если же знак меняется с "–" на "+", то в точке u_1 – минимум (рис. 2.3, *б*).

Если же знаки производных в точках $(u_1 - \varepsilon)$ и $(u_1 + \varepsilon)$ одинаковы, то в точке u_1 экстремума нет (рис. 2.3, *в*).

3 Исследование знаков высших производных. Этот способ применяется в тех случаях, когда исследуемая функция имеет производные высших порядков. Если в точке u_1 выполняется необходимое условие экстремума, т.е. $\left.\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right|_{u_1} = 0$ и существует вторая производная – $\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}u^2}$, значение которой вычисляется в "подозреваемой" точке u_1, то точка u_1 является точкой максимума, если $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}u^2}\right|_{u_1} < 0$, и точкой минимума,

если $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}u^2}\right|_{u_1} > 0$.

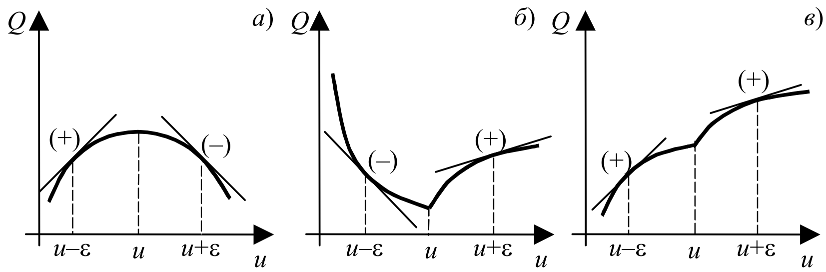


Рис. 2.3 Проверка достаточных условий экстремума:

а – максимум; *б* – минимум; *в* – экстремума нет

Если же $\left.\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}u^2}\right|_{u_1} = 0$, то для дальнейших исследований вычисляются $\left(\frac{\mathrm{d}^3 Q}{\mathrm{d}u^3}, \frac{\mathrm{d}^4 Q}{\mathrm{d}u^4}\right)$ и т.д.

При решении практических задач, как правило, приходится исследовать функции, имеющие несколько экстремумов. В этом случае говорят о нахождении наибольшего и наименьшего значения функции, которые называют глобальными экстремумами. Остальные экстремумы называются локальными. Также в практических задачах диапазон изменения переменной u часто бывает ограничен заданным интервалом $[a, b]$, поэтому в число "подозреваемых" точек должны быть включены и крайние точки этого интервала, так как в них может достигаться глобальный экстремум.

2.2 ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В большинстве задач оптимизации критерий оптимальности является функцией нескольких независимых переменных – $Q(u_1, u_2, ..., u_n)$. Если он является непрерывной функцией, имеющей непрерывные частные производные первого и второго порядка по всем переменным u_ι $(\iota = \overline{1, n})$, то необходимым условием экстремума в точке $\{\boldsymbol{u}^*\}$ является равенство нулю в этой точке первых производных по всем переменным, т.е. точки, в которой функция $Q(u_1, u_2, ..., u_n)$ может достигать экстремума, определяются решением системы уравнений

$$\left.\frac{\partial Q(u_1,\ u_2,\ ...,\ u_n)}{\partial u_\iota}\right|_{\boldsymbol{u}^*} = 0, \quad \iota = (\overline{1,\ n}). \tag{2.1}$$

Достаточные условия существования экстремума определяются в результате анализа знака квадратичной формы $B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, коэффициенты которой определяются соотношениями

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 Q(u_1, u_2, ..., u_n)}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 Q(u_1, u_2, ..., u_n)}{\partial u_j \partial u_i} = a_{ji}, \quad i,\ j = \overline{1, n}\ .$$

Квадратичная форма может быть положительно определенной и отрицательно определенной. Ответ о знаке квадратичной формы дает теорема, которая формулируется следующим образом: для положительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия Сильвестра

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_1 = a_{11} > 0;\\
&\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0;\\
&\dots\\
&\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0,
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

т.е. все главные миноры матрицы

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

должны быть строго положительны.

Квадратичная форма будет отрицательно определенной, если все главные миноры матрицы A, имеющие нечетный порядок, отрицательны, а, имеющие четный порядок, положительны, т.е. $\Delta_1 < 0$, $\Delta_3 < 0$, ..., $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$.

Если квадратичная форма является положительно определенной, то исследуемая точка является точкой минимума, если же квадратичная форма будет отрицательно определенной, то в точке $\{u_i\}$ имеет место максимум.

Возможен случай, когда все главные миноры отличны от нуля, но условия положительной или отрицательной определенности квадратичной формы не выполняются, в этом случае в исследуемой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. В случае обращения в нуль главных миноров матрицы A, вопрос о наличии экстремума в исследуемой точке решается более сложно с использованием производных более высокого порядка.

П р и м е р 2.1.

Пусть в реакторе идеального смешения протекает реакция первого порядка ($A \to P$). Требуется определить оптимальные условия – время пребывания и температуру, при которой себестоимость продукта P будет минимальной.

Критерий оптимальности – себестоимость задается функцией

$$Q(u_1, u_2) = \left(C_A + \frac{C_q}{Ux_{A0}}\right)\left(\frac{1}{u_1 u_2} + 1\right) + \frac{C_v}{u_2 x_{A0}}(u_1 u_2 + 1),$$

где u_1 – время пребывания, u_2 – константа скорости химической реакции, связанная с температурой уравнением Аррениуса $u_2 = \exp(-E / RT)$, E и R – константы; C_A – стоимость единицы расходуемого сырья;
C_q – стоимость дополнительного оборудования реактора, исчисляемая с учетом амортизации; C_v – стоимость единицы объема реактора, исчисляемая с учетом его амортизации; U – нагрузка реактора по исходному сырью; x_{A0} – начальная концентрация вещества A.

Необходимые условия экстремума функции $Q(u_1, u_2)$ дают систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial u_1} = -\left(C_A + \dfrac{C_q}{Ux_{A0}}\right)\dfrac{1}{u_1^2 u_2} + \dfrac{C_v}{x_{A0}} = 0; \\ \dfrac{\partial Q}{\partial u_2} = -\left(C_A + \dfrac{C_q}{Ux_{A0}}\right)\dfrac{1}{u_1 u_2^2} - \dfrac{C_v}{u_2^2 x_{A0}} = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение не удовлетворяет ни каким значениям u_1, u_2, поэтому разумно выдерживать максимально возможную температуру ведения процесса, что определит значение u_2. Оптимальное значение времени пребывания, соответствующее принятому значению температуры в этом случае определится как

$$u_{1\text{опт}} = \left(\frac{C_A U x_{A0} + C_q}{C_v U u_2}\right)^{0,5}.$$

Минимальная себестоимость составит

$$Q_{\text{опт}} = \frac{C_v}{u_2 x_{A0}}\left[1 + u_2\left(\frac{C_A U x_{A0} + C_q}{C_v U u_2}\right)^{0,5}\right]^2.$$

П р и м е р 2.2.

Найти экстремум функции $Q(u_1, u_2) = u_1^4 + u_2^4 - 4u_1 u_2$.

Необходимые условия экстремума записываются в виде системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q(u_1 u_2)}{\partial u_1} = 4u_1^3 - 4u_2 = 0; \\ \dfrac{\partial Q(u_1 u_2)}{\partial u_2} = 4u_2^3 - 4u_1 = 0. \end{cases}$$

Решение полученной системы уравнений дает три подозрительные точки на экстремум: (0, 0); (1, 1); (–1, –1). Для определения существования экстремума в найденных точках требуется проверить достаточные условия. С этой целью составляется матрица

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 Q}{\partial u_1^2} & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial u_2 u_1} & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial u_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12u_1^2 & -4 \\ -4 & 12u_2^2 \end{pmatrix}.$$

В найденных точках

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(1,1) = A(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A(0, 0)$ – знаконеопределена, следовательно, точка (0, 0) не является экстремальной. Матрицы $A(1, 1)$ и $A(-1, -1)$ положительно определенные ($\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 128 > 0$), поэтому в точках (1, 1) и (–1, –1) будет минимум – $Q_{\min} = -2$.

2.3 Метод неопределенных множителей Лагранжа

Условия экстремума функции, которые рассмотрены выше, позволяют найти, так называемый, безусловный экстремум. Однако, в большинстве практических задач принятия решения требуется принять решение – определить экстремум критерия оптимальности при условии, что на независимые переменные наложены ограничения, имеющие вид равенств. Типичными примерами подобных задач служат задачи, в которых требуется оптимальным образом распределить заданное количество ресурсов, чтобы принятая оценка эффективности процесса имела при этом максимальное или минимальное значение.

Для решения таких задач в классическом анализе используется метод неопределенных множителей Лагранжа. Сами задачи получили название задач на условный экстремум.

2.3.1 ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Пусть требуется найти экстремум функции, например, минимум

$$Q\,(u_1, u_2, ..., u_n) \to \min \tag{2.3}$$

при условии

$$\varphi_\iota\,(u_1, u_2, ..., u_n) = 0, \quad \iota = \overline{1, k}. \tag{2.4}$$

Согласно методу Лагранжа для решения задач на условный экстремум функции составляется вспомогательная функция Лагранжа, которая определяется соотношением

$$\overline{Q}\,(u_1, u_2, ..., u_n \lambda_1, ..., \lambda_k) = Q\,(u_1, ..., u_n) + \sum_{\iota=1}^{k} \lambda_\iota \varphi_\iota (u_1, ..., u_n), \tag{2.5}$$

где λ_ι, $\iota = \overline{1, k}$ – неопределенные множители Лагранжа.

Таким образом, задача нахождения условного экстремума функции (2.3) сводится к задаче нахождения безусловного экстремума функции (2.5), но число неизвестных в ней $n + k$ (u_ι, $\iota = \overline{1, n}$; λ_j, $j = \overline{1, k}$).

Как известно из п. 2.2 необходимым условием безусловного экстремума функции является равенство нулю частных производных, которые для данного конкретного случая записываются в виде

$$\frac{\partial Q(u_1, ..., u_n)}{\partial u_\iota} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1(u_1, ..., u_n)}{\partial u_\iota} + ... + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k(u_1, u_n)}{\partial u_\iota} = 0; \quad \iota = \overline{1, n}. \tag{2.6}$$

и дает n уравнений для определения неизвестных. Эта система уравнений дополняется к уравнениям (2.4) и, следовательно, получается $(n + k)$ неизвестных и $(n + k)$ уравнений.

Метод множителей Лагранжа дает лишь необходимые условия существования условного экстремума для непрерывных функций, имеющих также непрерывные производные, поэтому найденные значения переменных могут и не давать экстремума функции Q (u_1, ..., u_n), их надо проверить с использованием достаточных условий экстремума функции многих переменных.

В окончательном решении задачи фактически множители Лагранжа не известны, поэтому задача совместного решения системы (2.4), (2.6) иногда ставится как задача исключения "k" неизвестных переменных u_ι с последующим решением остающейся системы n уравнений с n неизвестными.

Задача Лагранжа имеет "$n - k$" степеней свободы.

2.3.2 ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДА МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Интерес представляют геометрический смысл множителей Лагранжа. Для такой интерпретации лучше рассмотреть задачу с двумя неизвестными и одним ограничением.

Пусть требуется найти минимум функции $Q = Q(u_1, u_2) \to \min$ при условии $\varphi\ (u_1, u_2) = 0$. Если минимум существует, то в пространстве функция Q должна иметь вид воронки, а условие связи – это некоторая поверхность (рис. 2.4).

На рис. 2.4, *б* изображены на плоскости переменных u_1, u_2 линии уровня функции $Q\ (u_1, u_2)$ и ограничение $\varphi\ (u_1, u_2) = 0$, представляющее собой линию. Составляется вспомогательная функция $\overline{Q}\ (u_1, u_2) = Q\ (u_1, u_2) + \lambda\varphi\ (u_1, u_2)$. Необходимое условие экстремума дает:

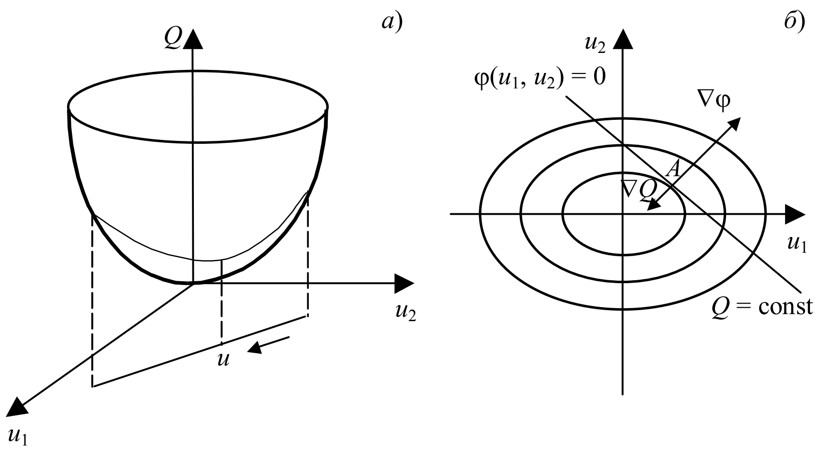


Рис. 2.4 Геометрический смысл множителей Лагранжа:
а – пространственное изображение;
б – изображение проекции на плоскость $u_2 - u_1$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{Q}}{\partial u_1} = \dfrac{\partial Q}{\partial u_1} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1} = 0; \\ \dfrac{\partial \overline{Q}}{\partial u_2} = \dfrac{\partial Q}{\partial u_2} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_2} = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial u_1} = -\lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1}; \\ \dfrac{\partial Q}{\partial u_2} = -\lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_2}. \end{cases} \tag{2.7}$$

В точке A (рис. 2.4) – точке касания линии $\varphi(u_1, u_2) = 0$ с линией равного уровня функции $\varphi(u_1, u_2)$ и $Q(u_1, u_2)$ имеют общую касательную и необходимое условие (2.7) минимума представляет собой условие пропорциональности двух векторов: вектора $\overline{\nabla Q} = \left\{\frac{\partial Q}{\partial u_1}, \frac{\partial Q}{\partial u_2}\right\}$ – градиента функции $Q(u_1, u_2)$ и вектора $\overline{\nabla\varphi} = \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial\varphi}{u_2}\right\}$ – градиента функции $\varphi(u_1, u_2)$.

Два вектора пропорциональны друг другу лишь в том случае, если они коллинеарные. Так как градиент функции перпендикулярен касательной к линии уровня, то в точке A выполняется условие (2.7), и множитель λ является коэффициентом пропорциональности между векторами ∇Q и $\nabla\varphi$.

2.3.3 ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА МЕТОДА МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

В некоторых задачах множители Лагранжа допускают и экономическое толкование. Если толковать целевую функцию $Q(u_1, ..., u_n)$ как прибыль, получаемую некоторым предприятием при использовании ресурсов, а условия $\varphi_\iota(u_1, ..., u_n) = 0$, $\iota = \overline{1, k}$ ограничения на дефицит ресурсов, то при $\varphi_\iota(u_1, ..., u_n) < 0$ прибыль, то максимум целевой функции будет расти.

Экономист такую задачу будет решать следующим образом. Он назначит некоторые цены λ_ι на единицы ресурсов φ_ι и предложит потребителю купить их по этой цене. Последний, максимизируя чистую прибыль $\overline{Q}(u_1, ..., u_n) = Q(u_1, ..., u_n) - \sum_{\iota=1}^{k} \lambda_\iota \varphi_\iota(u_1, ..., u_n)$, найдет $(u_1, ..., u_n)$ и скажет, сколько ресурсов он хотел бы купить. В экономике почти всегда бывает так, что чем больше λ_ι, тем меньше $\varphi_\iota(u_1, ..., u_n)$, и чем меньше λ_ι, тем больше $\varphi_\iota(u_1, ..., u_n)$. Если окажется, что $\varphi_\iota(u_1, ..., u_n) > 0$, то экономист повысит цену, если $\varphi_\iota(u_1, ..., u_n) < 0$ – понизит. Так будет происходить до тех пор, пока при некоторой цене, называемой равновесной, потребителю будет выгодно, чтобы дефицит ресурсов $\varphi_\iota(u_1, ..., u_n)$ был равен нулю, при этом чистая прибыль будет максимальна, т.е. будут выполняться условия $\frac{\partial Q(u_1, ..., u_n)}{\partial u_\iota} - \sum_{\iota=1}^{k} \lambda_\iota \frac{\partial \varphi_\iota(u_1, ..., u_n)}{\partial u_\iota} = 0.$

Таким образом, равновесная цена с точностью до знака равна множителю Лагранжа.

2.3.4 ОСОБЫЕ СЛУЧАИ

В заключение следует отметить особые случаи, когда градиент функции $Q(u_1, ..., u_n)$ равен нулю ($\nabla Q = 0$) и когда градиент $\varphi_\iota(u_1, ..., u_n)$ равен нулю ($\nabla\varphi_\iota = 0$).

В первом случае решение может достигаться в точке экстремума функции $Q(u_1, ..., u_n)$, множители λ_ι равны нулю, и задача сводится к задаче безусловного экстремума и условия $\varphi_\iota(u_1, ..., u_n) = 0$ роли не играют. Во втором случае подозрительные на экстремум точки находятся из уравнений $\nabla\varphi_\iota(u_1, ..., u_n) = 0$, в которых затем вычисляется значение критерия $Q(u_1, ..., u_n)$.

Для того, чтобы условия экстремума были справедливы и в особых случаях, функцию Лагранжа записывают в виде

$$\overline{Q}(u_1, ..., u_n) = \lambda_0 Q(u_1, ..., u_n) + \sum_{\iota=1}^{k} \lambda_\iota \varphi(u_1, ..., u_n),$$

тогда можно утверждать, что для условного экстремума $Q(u_1, ..., u_n)$ необходимо существование таких чисел λ_0, λ_ι, одновременно не равных нулю, что в точке предполагаемого решения выполнены условия $\lambda_0 \geq 0$

$$\frac{\partial \overline{Q}(u_1, ..., u_n)}{\partial u_1} = ... = \frac{\partial \overline{Q}(u_1, ..., u_n)}{\partial u_\iota} = ... = \frac{\partial \overline{Q}(u_1, ..., u_n)}{\partial u_n} = 0,$$

$$\varphi_\iota(u_1, ..., u_n) = 0.$$

Если $\lambda_0 \neq 0$, то его можно выбрать положительным числом, обычно полагают $\lambda_0 = 1$, это никак не отражается на решении.

П р и м е р 2.3.

Требуется найти минимум функции $Q(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$ при условии $u_1 + u_2 = 1$.

Для решения записывается функция Лагранжа

$$\overline{Q}(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 + \lambda(u_1 + u_2 - 1),$$

для которой уже необходимо определить безусловный экстремум. Необходимое условие экстремума даст следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{Q}(u_1, u_2)}{\partial u_\iota} = 2u_1 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial \overline{Q}(u_1, u_2)}{\partial u_\iota} = 2u_2 + \lambda = 0, \end{cases}$$

откуда $u_1 = -\lambda/2$, $u_2 = -\lambda/2$. Используя уравнение связи $u_1 + u_2 = 1$, получают $\lambda = -1$, $u_1 = 1/2$, $u_2 = 1/2$ и соответственно $\min Q(u_1, u_2) = 1/2$.

П р и м е р 2.4.

По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве u_1 изделий первым способом затраты равны $(4u_1 + u_1^2)$ р., а при изготовлении u_2 изделий вторым способом они составляют $(8u_2 + u_2^2)$ р. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, так чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции $Q(u_1, u_2) = 4u_1 + u_1^2 + 8u_2 + u_2^2$ при условиях $u_1 + u_2 = 180$, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$.

Задача может быть решена методом множителей Лагранжа. Для этого без учета требования неотрицательности переменных составляется функция Лагранжа $\overline{Q}(u_1, u_2) = 4u_1 + u_1^2 + 8u_2 + u_2^2 + \lambda(180 - u_1 - u_2)$.

Необходимое условие экстремума функции Лагранжа дает

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{Q}(u_1, u_2)}{\partial u_1} = 4 + 2u_1 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial \overline{Q}(u_1, u_2)}{\partial u_2} = 8 + 2u_2 - \lambda = 0, \end{cases}$$

откуда $u_1 = \dfrac{\lambda - 4}{2}$, $u_2 = \dfrac{\lambda - 8}{2}$.

Подстановка найденных значений в условие $u_1 + u_2 = 180$ дает $\dfrac{\lambda - 4}{2} + \dfrac{\lambda - 8}{2} = 180$ и, следовательно, $\lambda = 186$ и, соответственно, $u_1 = 91$, $u_2 = 89$.

По вторым частным производным можно показать, что найденная точка доставляет минимум функции $Q(u_1, u_2)$, т.е. если будет изготовлено 91 изделие первым технологическим способом и 89 изделий вторым технологическим способом, общие затраты будут минимальны и составят $Q_{\min} = 17\,278$ р.

2.4 ОСОБЕННОСТИ РЕАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотренные классические методы анализа предполагают известное аналитическое выражение критерия оптимальности, имеющего производные по всем переменным, и позволяют найти экстремум только внутри области изменения независимых переменных. Реальные задачи решать этими методами практически невозможно, так как они имеют ряд особенностей.

1 Целевая функция не является гладкой, она может быть "колючей" (рис. 2.5), и тогда применять необходимые условия экстремума не представляется возможным.

2 При наличии ограничений на независимые переменные минимум целевой функции может быть на границе (рис. 2.6). Необходимое условие оптимальности позволяет найти минимум только внутри допустимой области, и в этом случае механизм нахождения экстремума (определение первых производных и приравнивание их нулю) теряет смысл, так как минимум таким образом определен не будет.

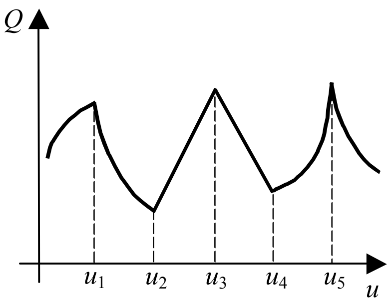


Рис. 2.5 "Колючая" целевая функция

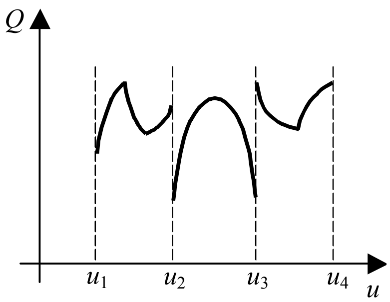


Рис. 2.6 Целевая функция с минимумом на границе

3 Критерий оптимальности задается алгоритмически, производные тогда можно рассчитывать только численными методами. Примером такого критерия является прибыль, которую нельзя аналитически связать с капиталовложениями.

4 Метод множителей Лагранжа предполагает наличие связей в виде равенств. В реальных задачах существуют ограничения и в виде неравенств.

Во всех перечисленных случаях экстремум целевой функции может быть определен, но другими методами, которые рассматриваются далее.

3 НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Математическая формулировка задачи принятия решения, как уже отмечалось, эквивалентна задаче отыскания наибольшего или наименьшего значения функции одной или нескольких переменных. В большинстве практических задач критерий оптимальности $Q\,(\boldsymbol{u})$, где $\boldsymbol{u}$ – вектор управляющих переменных, не может быть записан в явном виде, его значение обычно находится в результате решения системы уравнений математического описания оптимизируемого объекта. На независимые переменные u_i, $i = \overline{1,n}$ могут быть наложены связи и ограничения как в виде равенств $\varphi_\iota\,(\boldsymbol{u}) = 0$, $\iota = \overline{1,m}$, так и в виде неравенств $\psi_i\,(\boldsymbol{u}) \le 0$, $i = \overline{1,l}$, которые, как правило, являются нелинейными и трудно вычислимыми соотношениями. Задачи такого типа являются предметом рассмотрения специального раздела математики, называемого нелинейным программированием. Обычно, решения задач нелинейного программирования могут быть найдены только численными методами.

3.1 ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача нелинейного программирования встречается в естественных науках, технике, экономике, математике, в сфере деловых отношений и в науке управления государством.

Нелинейное программирование, например, связано с основной экономической задачей. Так в задаче о распределении ограниченных ресурсов максимизируют либо эффективность, либо, если изучается потребитель, потребление при наличии ограничений, которые выражают условия недостатка ресурсов. В такой общей постановке математическая формулировка задачи может оказаться невозможной, но в конкретных применениях количественный вид всех функций может быть определен непосредственно. Например, промышленное предприятие производит изделия из пластмассы. Эффективность производства здесь оценивается прибылью, а ограничения интерпретируются как наличная рабочая сила, производственные площади, производительность оборудования и т.д.

Метод "затраты – эффективность" также укладывается в схему нелинейного программирования. Данный метод был разработан для использования при принятии решений в управлении государством. Общей функцией эффективности является благосостояние. Здесь возникают две задачи нелинейного программирования: первая – максимизация эффекта при ограниченных затратах, вторая – минимизация затрат при условии, чтобы эффект был выше некоторого минимального уровня. Обычно эта задача хорошо моделируется с помощью нелинейного программирования.

Результаты решения задачи нелинейного программирования являются подспорьем при принятии государственных решений. Полученное решение является, естественно, рекомендуемым, поэтому необходимо исследовать предположения и точность постановки задачи нелинейного программирования, прежде чем принять окончательное решение.

Задачи нелинейного программирования часто возникают и в других отраслях науки. Так, например, в физике целевой функцией может быть потенциальная энергия, а ограничениями – различные уравнения движения. В общественных науках и психологии возникает задача минимизации социальной напряженности, когда поведение людей ограничено определенными законами.

Преобразование реальной задачи в задачу нелинейного программирования является в значительной степени искусством, но это искусство направляется теорией.

3.2 Общая характеристика методов решения задач нелинейного программирования

Нередко методы нелинейного программирования могут быть охарактеризованы как многошаговые методы или методы улучшения исходного решения. Разнообразие методов решения задач нелинейного программирования объясняется стремлением найти оптимальное решение за наименьшее число шагов, чтобы избежать необходимости многократного вычисления значений целевой функции.

В большинстве методов нелинейного программирования используется идея движения в n-мерном пространстве в направлении оптимума. При этом из некоторого исходного или промежуточного состояния $\boldsymbol{u}^i$ осуществляется переход в следующее состояние $\boldsymbol{u}^{i+1}$ изменением вектора $\boldsymbol{u}^i$ на величину $\Delta\,\boldsymbol{u}^i$, называемую шагом.

$$\boldsymbol{u}^{i+1} = \boldsymbol{u}^i + \Delta\boldsymbol{u}^i. \qquad (3.1)$$

При поиске минимума целевой функции $Q\,(\boldsymbol{u})$ для удачно выбранного шага должно выполняться условие $Q\,(\boldsymbol{u}^{i+1}) < Q\,(\boldsymbol{u}^i)$, в противном случае переход в состояние $\boldsymbol{u}^{i+1}$ нецелесообразен.

В значительной части методов шаг определяется как некоторая функция состояния $\boldsymbol{u}^i$: $\Delta\boldsymbol{u}^i = \Delta\boldsymbol{u}^i(\boldsymbol{u}^i)$, и, следовательно, новое состояние можно рассматривать как функцию исходного состояния $\boldsymbol{u}^{i+1} = \boldsymbol{u}^i + \Delta\boldsymbol{u}^i\ (\boldsymbol{u}^i)$. В этом смысле шаговые методы поиска оптимума называются итеративными.

Методы нелинейного программирования в зависимости от способа задания шага $\Delta\boldsymbol{u}_\iota$ подразделяются на три основных класса: 1) градиентные методы; 2) безградиентные методы; 3) методы случайного поиска. Некоторые методы организуются как комбинированные алгоритмы, использующие достоинства методов различных классов. Кроме того различают методы одномерной оптимизации (u-скаляр) и многомерной оптимизации ($\boldsymbol{u}$-вектор).

Задача нелинейного программирования в общем случае рассматривается в n-мерном пространстве, где наглядное графическое изображение отсутствует, в связи с этим используется следующий прием графического представления.

Если целевая функция $Q\,(\boldsymbol{u})$ непрерывна в области U, то вокруг точки $\boldsymbol{u}_{\text{опт}}$ всегда можно провести в данной плоскости замкнутую линию, вдоль которой значение $Q\,(\boldsymbol{u})$ постоянно (рис. 3.1, *а*). Эти замкнутые линии называются линиями равного уровня функции $Q\,(\boldsymbol{u})$ и отвечают различным значениям $Q\,(\boldsymbol{u}) = q_\iota$. Вокруг точки $\boldsymbol{u}_{\text{опт}}$ можно провести сколько угодно линий уровня, причем каждая из них будет целиком охватывает любую линию, для которой значение целевой функции $Q\,(\boldsymbol{u})$ меньше (или больше).

При наличии связи $\varphi\,(u) = 0$, что в n-мерном пространстве определяет $(n-1)$-мерную поверхность, пересечение которой с рассматриваемой поверхностью определяет область (рис. 3.1, *б*), в которой и ищется оптимальное решение.

Ограничения типа неравенств независимо от их числа наглядно представлены на рис. 3.1, *в*. Здесь заходить в заштрихованную область нельзя.

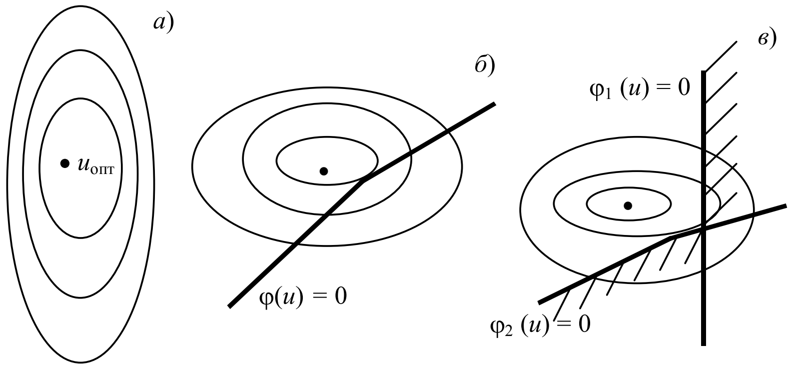


Рис. 3.1 Геометрическое представление целевой функции:
а – линии равного уровня; *б* – линии равного уровня и связи типа равенств;
в – линии равного уровня и ограничения типа неравенств

Особенностями целевой функции являются седловые точки, так называемые "овраги" и многоэкстремность. В седловых точках функция $Q\,(\boldsymbol{u})$ по одному или нескольким направлениям имеет минимум, в то время как по остальным – максимум. При наличии оврагов вдоль определенных направлений величина функции $Q\,(\boldsymbol{u})$ изменяется очень слабо. Целевая функция может иметь не один, а несколько оптимумов. Оптимум называется глобальным, если для него справедливо условие $Q\,(\boldsymbol{u}_{\text{опт}}) \le Q\,(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{u} \in U$, которое выполняется для любых допустимых значений $\boldsymbol{u}$. Если существуют другие оптимумы, то они называются локальными, и соотношения типа $Q(\boldsymbol{u}_{\text{опт}}) \le Q(\boldsymbol{u})$ выполняется только в окрестностях точек $\boldsymbol{u}_{\text{опт}}$. Для отыскания глобального оптимума необходимо найти и проверить, вообще говоря, все без исключения локальные оптимумы, имеющейся целевой функции.

Среди методов, применяемых для решения задач нелинейного программирования значительное место занимают методы поиска решения, основанные на анализе производных оптимизируемой функции.

Эта функция должна быть непрерывно дифференцируемой. Для этого вводится понятие производной по направлению l

$$\frac{\partial Q(u)}{\partial l} = \lim_{u^* \to u} \frac{Q(u^*) - Q(u)}{u^* - u}, \tag{3.2}$$

где u, u^* – точки, расположенные на прямой l. Эта производная (3.2) характеризует скорость изменения функции Q (u) в точке и в направлении l, она может быть выражена через производные по координатам, число которых конечно и равно размерности n. Согласно правилу дифференцирования сложных функций, можно записать

$$\frac{\partial Q(u)}{\partial l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q(u)}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial l}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим расчет $\partial u_i / \partial l$ в пространстве двух переменных (рис. 3.2).

Из прямоугольного треугольника ABC можно записать $\frac{du_1}{dl} = \cos(u_1 \hat{} l)$, $\frac{du_2}{dl} = \cos(u_2 \hat{} l)$, $dl = \sqrt{(du_1)^2 + (du_2)^2}$. Таким образом, величины $\partial u_i / dl$ есть не что иное, как направляющие косинусы выбранного направления l по отношению к осям координат. Следовательно, (3.3) можно переписать следующим образом

$$\frac{\partial Q(u)}{\partial l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q(u)}{\partial u_i} \cos(u_i \hat{} l). \tag{3.4}$$

Если теперь рассмотреть поверхность равного уровня, которая имеет (n – 1) независимых переменных, то в каждой точке этой поверхности, называемой гиперповерхностью, можно провести (n – 1) взаимно перпендикулярных касательных в соответствии с числом измерений этой поверхности. Кроме того, в этой же точке можно провести ось, перпендикулярную всем касательным и, следовательно, направленную по нормали к поверхности. Подобное построение для случая (n = 3) изображено на рис. 3.3.

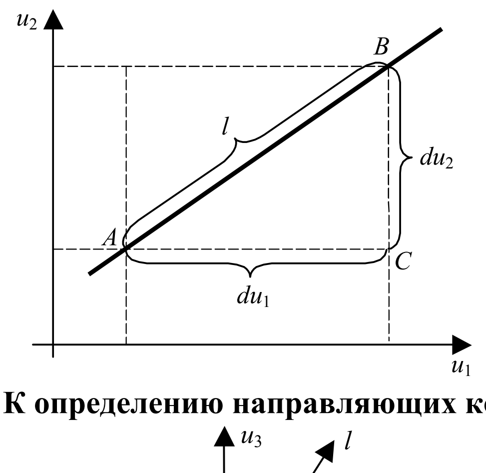


Рис. 3.2 К определению направляющих косинусов

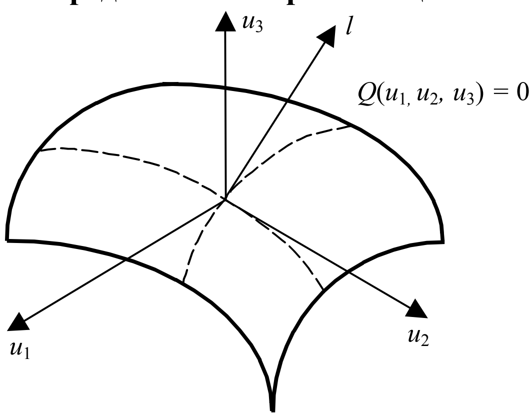


Рис. 3.3 Система координат, связанная с произвольной точкой поверхности постоянного уровня

Касательные и нормаль могут рассматриваться как система координат с началом в выбранной точке поверхности. Данная система координат обладает тем важным свойством, что частные производные от функции $Q\ (u)$ по направлениям осей равны нулю, так как вдоль этих направлений функция $Q\ (u)$ сохраняет постоянное значение. В соответствии со сказанным производная по произвольному направлению l запишется как

$$\frac{\partial Q(u)}{\partial l} = \frac{\partial Q(u)}{\partial u} \cos(u \hat{} l), \tag{3.5}$$

что следует из (3.4), где производные по всем осям, за исключением нормали, оказываются равными нулю.

Максимальное значение $\cos\alpha$ по абсолютной величине не превышает единицы, аргумент при этом равен нулю, следовательно, направление, по которому производная $\partial Q / \partial l$ имеет максимальное значение, совпадает с направлением нормали к поверхности постоянного уровня функции $Q\ (u)$. Если теперь по направлению нормали отложить вектор длиной равной $\left|\frac{\partial Q}{\partial u}\right|$, то полученный вектор называется градиентом скалярной функции $Q\ (u)$ в точке u и обозначается $\nabla Q\ (u)$ (читается "набла ку") или ($\overline{\mathrm{grad}}\, Q(u)$). Формулу (3.5) можно записать как $\frac{\partial Q(u)}{\partial l} = \nabla_l\, Q\ (u)$, где $\nabla_l\, Q\ (u)$ – проекция градиента функции $Q\ (u)$ по направлению l. Отсюда следует, что проекции вектора градиента на оси координат равны производным функции $Q\ (u)$ по соответствующим переменным, т.е. $\nabla Q\ (u) = \left(\frac{\partial Q}{\partial u_1}, \frac{\partial Q}{\partial u_2}, ..., \frac{\partial Q}{\partial u_n}\right)$.

Основным свойствам градиента целевой функции является то, что вектор градиента по направлению совпадает с направлением наискорейшего возрастания этой функции. Именно это свойство обусловило применение градиентных методов при решении задач нелинейного программирования.

3.3 МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Задача поиска экстремума функции одной переменной возникает при оптимизации целевой функции, зависящей от одной скалярной переменной. Такие задачи входят составной частью во многие итерационные методы решения задач многомерной оптимизации.

Например, численные методы поиска экстремума имеют особенность в том, что их применение не позволяет определить *точное* значение координат, при котором достигается экстремум функции. В этом случае определяют *интервал неопределенности*, в котором локализуется экстремум функции. Величина этого интервала – Δ, определяется исходя из требований точности результата решения при постановке задачи (быстродействие, точность и пр.). Таким образом, численное решение задачи поиска экстремума функции сводится к уменьшению интервала неопределенности от исходного до Δ.

3.3.1 Метод прямого сканирования

Задача заключается в локализации экстремума функции одной переменной, заданной на интервале [*a*, *b*] с точностью до Δ. При решении этой задачи весь интервал разбивается на участки величиной Δ. В узлах разбиения вычисляются значения функции *Q* и из них выбирается экстремальное. Этот метод требует больших затрат времени (зависящего от значения Δ), но главное его преимущество – это определение глобального экстремума. Блок-схема алгоритма поиска *Q* (*x*) представлена на рис. 3.4, *б*.

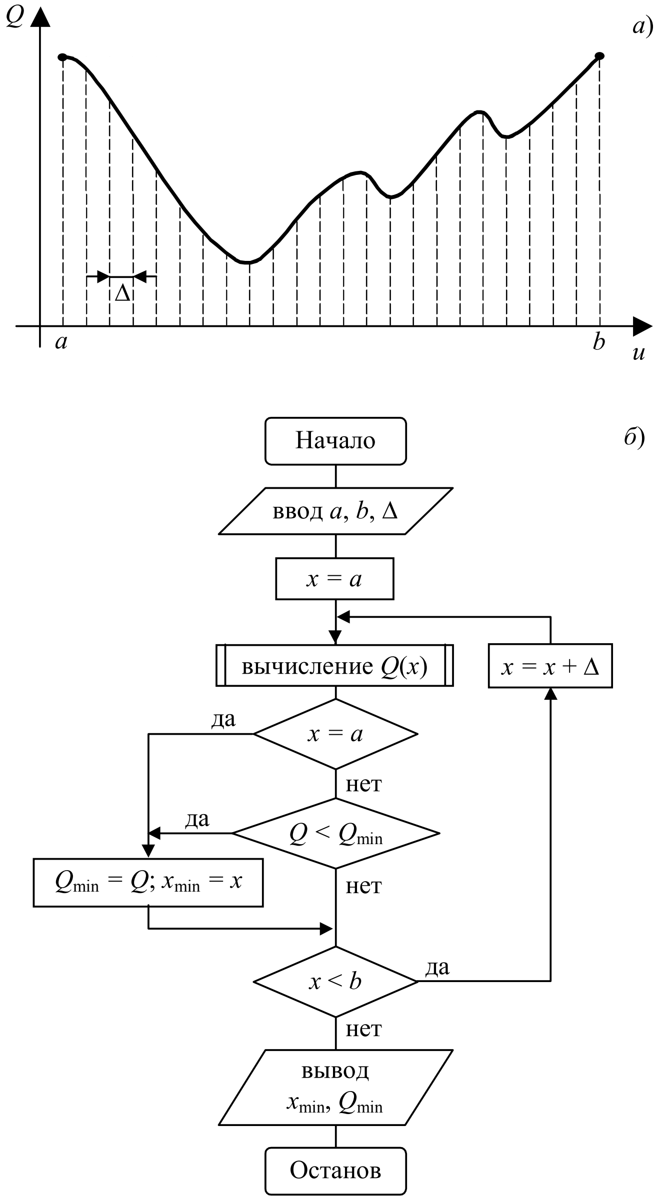


Рис. 3.4 Локализация экстремума методом сканирования:
а – геометрическая интерпретация; *б* – блок-схема алгоритма

3.3.2 Метод половинного деления

Естественным и наиболее распространенным на практике методом поиска экстремума функции одной переменной является метод последовательного деления отрезка пополам. Этот метод был известен еще в древней Греции как метод дихотомии.

Пусть требуется определить экстремум унимодальной функции
$Q(u)$ на отрезке $[a, b]$ с точностью Δ. Отрезок $[a, b]$ делится пополам и вычисляются значения функции $Q(x_1) = F1$ и $Q(x_2) = F2$ в точках $x_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm \frac{\Delta}{2}$.

На основе анализа значений $F1$ и $F2$ вдвое уменьшается интервал неопределенности и процесс повторяется пока $b - a > \Delta$. Блок-схема этого метода приведена на рис. 3.5, *б*.

3.3.3 Метод "золотого сечения"

Гораздо эффективнее, с точки зрения уменьшения затрат на вычисления, метод "золотого сечения": интервал неопределенности делится не пополам, как в методе дихотомии, а в определенном иррациональном соотношении $\tau = \frac{ac}{cb} = \frac{cb}{ab}$.

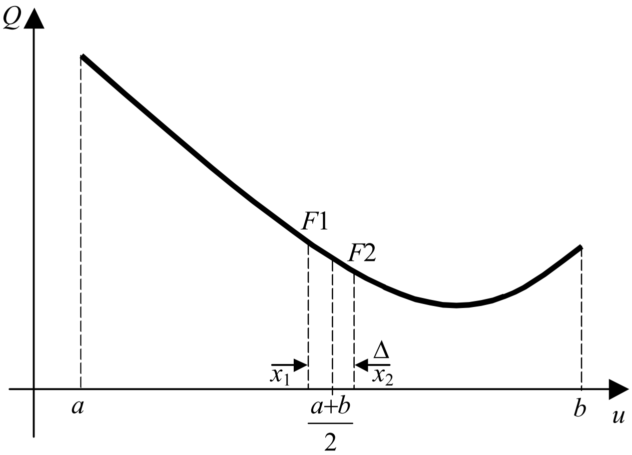
Это соотношение выполняется при $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989...$

Метод заключается в том, что по заданным a и b как можно точнее определяется значение внутренней точки x_1 (см. рис. 3.6, *б*) по формуле

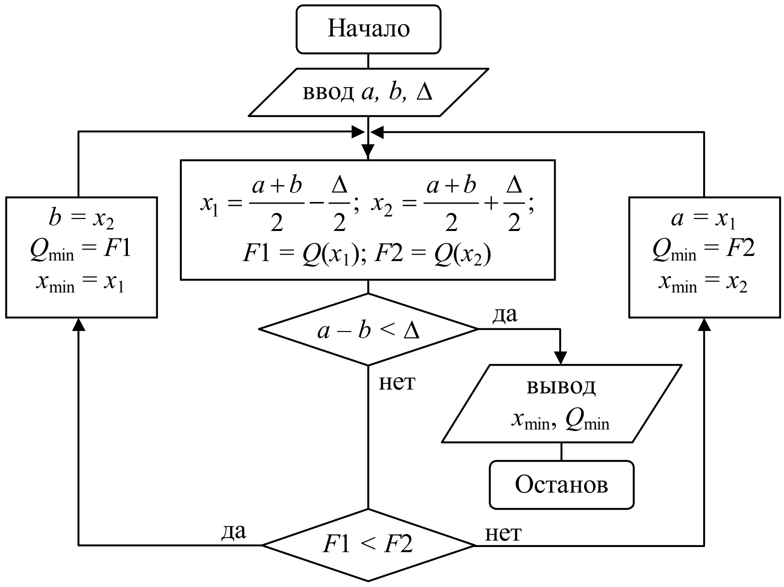
$$x_1 = b - (b - a) / 1{,}618033989\ldots \qquad (3.6)$$

Точка x_2 определяется как точка, симметричная точке x_1 на отрезке $(a - b)$.

На основе анализа значений $F1 = Q(x_1)$ и $F2 = Q(x_2)$ интервал неопределенности сокращается путем отбрасывания из рассмотрения отрезка в котором экстремум исключен, исходя из условий унимодальности $Q(u)$. Далее мы определим симметричную точку внутри новых границ, вычисляем значение Q в этой точке, проводим анализ и т.д. до тех пор, пока разность между симметричными точками внутри интервала неопределенности больше Δ. Блок-схема алгоритма метода "золотого сечения" представлена на рис. 3.7.



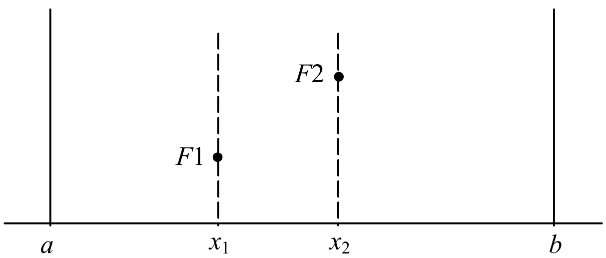
а)



б)

Рис. 3.5 Метод деления отрезка пополам:
а – геометрическая интерпретация; *б* – блок-схема

а)



б)

Рис. 3.6 Метод "золотого сечения":
а – золотое сечение; *б* – геометрическое представление

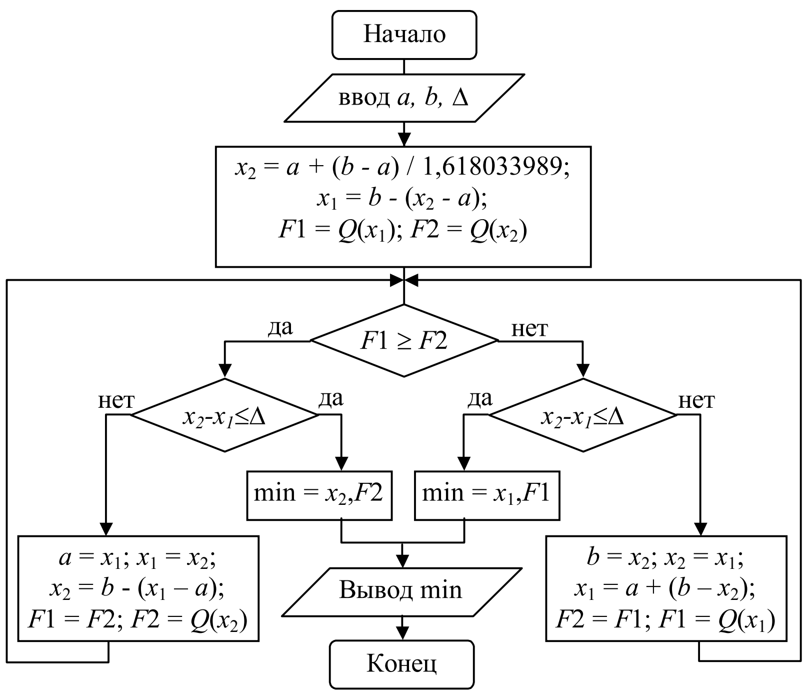


Рис. 3.7 Блок-схема метода "золотого сечения"

3.3.4 Метод Фибоначчи

Метод, использующий числа Фибоначчи, позволяет наиболее эффективно достичь заданной точности в поиске экстремума функции $Q(u)$. Числа Фибоначчи определяются соотношением

$$F_0 = F_1 = 1; \quad F_k = F_{k-1} + F_{k-2}; \quad k = 2, 3, \ldots$$

При большом "k" отношение соседних чисел Фибоначчи близко к отношению "золотого сечения".

Этот метод делит интервал неопределенности не в постоянном соотношении, а в переменном и предполагает некоторое, вполне определенное, зависящее от Δ, число вычислений значений функции $Q(u)$.

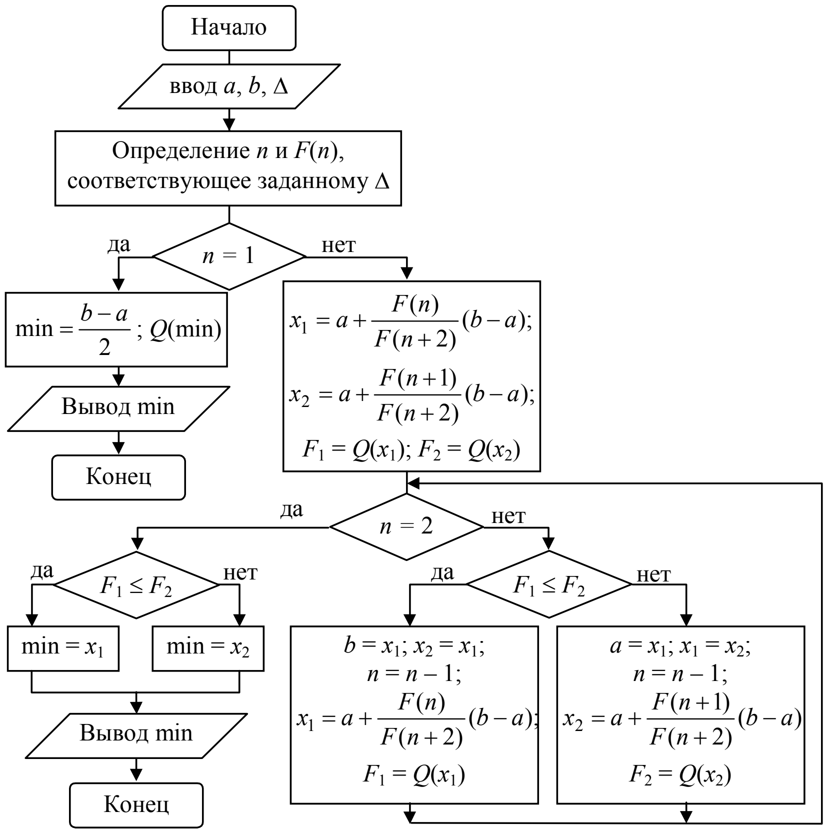


Рис. 3.8 Блок-схема метода Фибоначчи

По заданному Δ определяется количество вычислений n и соответствующее ему число Фибоначчи F_n, исходя из соотношения

$$\Delta = \frac{b-a}{2F_{n+1}}.$$

В остальном схема метода близка к методу "золотого сечения" в котором значение x_1 и x_2 (см. рис. 3.8) определяются отношением соответствующих чисел Фибоначчи.

3.4 МЕТОДЫ МНОГОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В настоящее время разработано огромное число методов многомерной оптимизации, охватывающие почти все возможные случаи. Здесь рассматривается лишь несколько основных, считающихся классическими, методов поиска экстремума функции многих переменных.

Смысл всех методов нахождения безусловного экстремума функции нескольких переменных заключается в том, что по определенному правилу выбирается последовательность значений $\{u_l\}$ вектора u такая, что $Q(u_{l+1}) \le (\ge)\ Q(u_l)$. Так как целевая функция предполагается ограниченной, то такая последовательность ее значений стремится к пределу.

В зависимости от принятого алгоритма и выбора начальной точки этим пределом может быть локальный или глобальный экстремум функции $Q\,(u)$.

3.4.1 Метод Гаусса-Зайделя

Метод заключается в последовательном определении экстремума функции одной переменной с точностью до ε вдоль каждой координаты, т.е. фиксируются все координаты, кроме одной, по которой и осуществляется поиск экстремума Q. Потом та же процедура осуществляется при фиксации следующей координаты.

После рассмотрения всех n координат выполняется возврат к первой и вновь производится поиск локального экстремума вдоль каждой из n координат до тех пор, пока экстремум не будет локализован с заданной точностью (см. рис. 3.9).

3.4.2 Метод градиента

В этом методе используется градиент целевой функции, шаги совершаются по направлению наибыстрейшего уменьшения целевой функции, что, естественно, ускоряет процесс поиска оптимума.

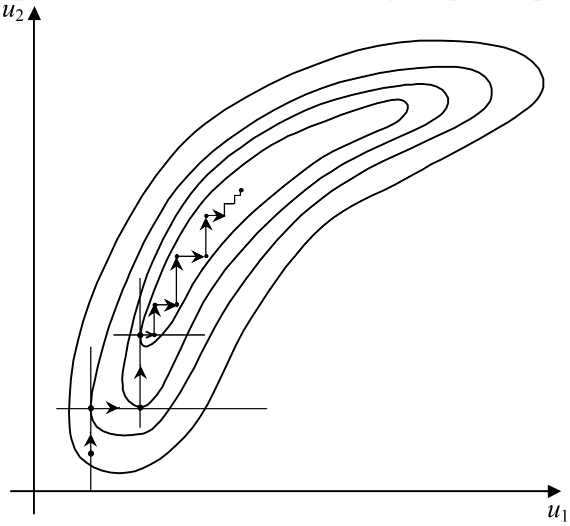


Рис. 3.9 Характер движения к оптимуму в методе Гаусса-Зейделя

Идея метода заключается в том, что находятся значения частных производных по всем независимым переменным – $\partial Q \,/\, \partial u_\iota$, $\iota = \overline{1,\,n}$, которые определяют направление градиента в рассматриваемой точке $\nabla Q = \frac{\partial Q}{\partial u_1}\iota_1 + \frac{\partial Q}{\partial u_2}\iota_2 + \ldots + \frac{\partial Q}{\partial u_n}\iota_n$, и осуществляется шаг в направлении обратном направлению градиента, т.е. в направлении наибыстрейшего убывания целевой функции (если ищется минимум). Итерационный процесс имеет вид

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_k \nabla Q\left(u^k\right), \tag{3.7}$$

где параметр $\alpha_k \geq 0$ задает длину шага.

Алгоритм метода градиента при непосредственном его применении включает в себя следующие этапы.

1 Задается начальное значение вектора независимых переменных $\left(u_1^0,\, u_2^0,\, \ldots,\, u_n^0\right)$, определяющего точку, из которой начинается движение к минимуму.

2 Рассчитывается значение целевой функции в начальной точке $Q_0\left(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0\right)$.

3 Определяется направление градиента в начальной точке (рис. 3.10).

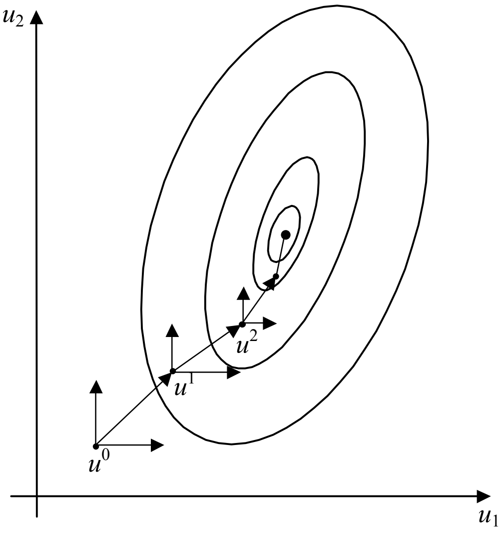


Рис. 3.10 Характер движения к оптимуму в методе градиента

4 Делается шаг в направлении антиградиента при поиске минимума, в результате чего попадают в точку u^1.

5 Процесс поиска продолжается, повторяя все этапы с п. 2, т.е. вычисляется $Q_1\left(u_1^1, u_2^1, ..., u_4^1\right)$, определяется направление градиента в точке u^1, делается шаг и т.д.

Важной задачей в этом методе является выбор шага. Если размер шага слишком мал, то движение к оптимуму будет долгим из-за необходимости расчета целевой функции и ее частных производных в очень многих точках. Если же шаг будет выбран слишком большим, то в районе оптимума может возникнуть "рыскание", которое либо затухает слишком медленно, либо совсем не затухает. На практике сначала шаг выбирается произвольно. Если окажется, что направление градиента в точке u^1 существенно отличается от направления в точке u^2, то шаг уменьшают, если отличие векторов по направлению мало, то шаг увеличивают. Изменение направления градиента можно определять по углу поворота градиента рассчитываемого на каждом шаге по соответствующим выражениям.

Итерационный процесс поиска обычно прекращается, если выполняются неравенства $\left|u^k – u^{k-1}\right| \le \varepsilon,\ \left|Q\left(u^k\right) – Q\left(u^{k-1}\right)\right| / Q\left(u^{k-1}\right) \le \delta,\ \partial Q\left(u^k\right) / \partial u \le \gamma$, где ε, δ, γ – заданные числа.

Недостатком градиентного метода является то, что при его использовании можно обнаружить только локальный минимум целевой функции. Для нахождения других локальных минимумов поиск необходимо производить из других начальных точек.

3.4.3 Метод наискорейшего спуска

При применении метода градиента на каждом шаге вычисляются значения всех частных производных оптимизируемой функции Q по всем независимым переменным U, что при большом числе этих переменных приводит к весьма большому времени поиска оптимума. Сократить время поиска позволяет метод наискорейшего спуска, блок-схема которого отображена на рис. 3.4, где ε – точность вычисления,

H – величина шага, n – размерность вектора u, Q – алгоритм вычисления целевой функции Q (u), L – количество шагов по конкретному направлению градиента функции Q.

Таким образом, в начальной точке u_0 определяется градиент целевой функции $\frac{\partial Q}{\partial u_i}$ и, следовательно, направление ее наибыстрейшего убывания; далее делается шаг спуска в этом направлении. Если значение целевой функции уменьшились, то делается следующий шаг в этом же самом направлении. Процедура повторяется до тех пор, пока в этом направлении не будет найден минимум, после чего только вычисляется градиент и определяется новое направление наибыстрейшего убывания целевой функции.

По сравнению с методом градиента метод наискорейшего спуска оказывается более выгодным из-за сокращения объема вычислений. Чем менее резко изменяется направление градиента целевой функции, тем выгоднее использовать метод наискорейшего спуска, т.е. вдали от оптимума. Вблизи оптимума рассматриваемый метод автоматически переходит в метод градиента. Окончание поиска происходит в соответствии с теми же критериями, что и в методе градиента.

3.4.4 Метод квантования симплексов

Симплексный метод относится к группе безградиентных методов детерминированного поиска. Основная идея метода заключается в том, что по известным значениям функции в вершинах выпуклого многогранника, называемого симплексом, находится направление, в котором требуется сделать следующий шаг, чтобы получить наибольшее уменьшение (увеличение) критерия оптимальности. Примером симплекса на плоскости является треугольник, в трехмерном пространстве – четырехгранная пирамида, в n-мерном пространстве – многогранник с $n + 1$ вершиной. Основным свойством симплекса является то, что против любой из вершин симплекса расположена только одна грань, на которой можно построить новый симплекс, отличающийся от прежнего расположением новой вершины, остальные вершины обоих симплексов – совпадают.

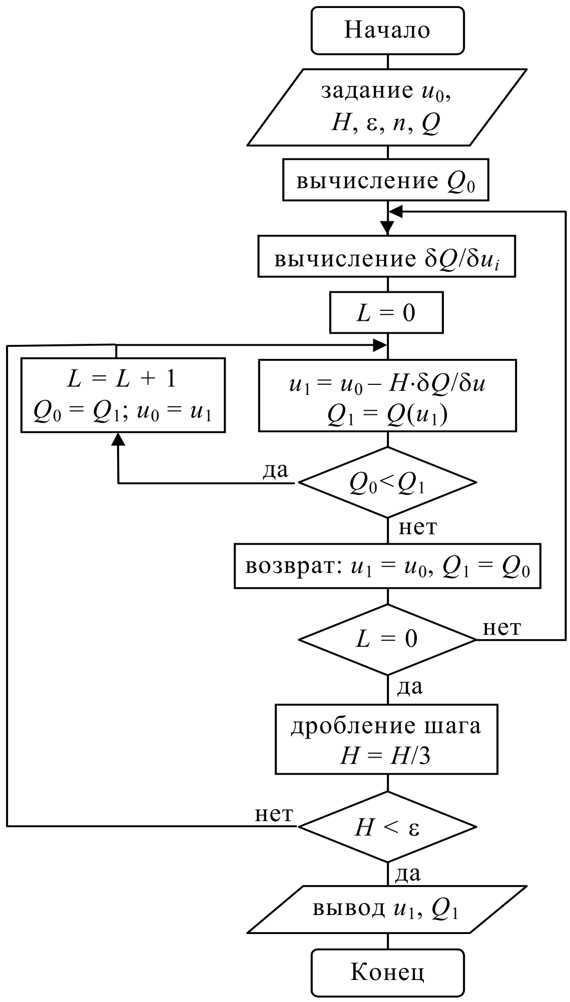


Рис. 3.11 Блок-схема метода наискорейшего спуска

Наглядную иллюстрацию симплексного метода удобнее рассматривать на примере задачи отыскания минимального значения целевой функции двух независимых переменных (рис. 3.11). Алгоритм поиска заключается в следующем.

1 Определяются значения целевой функции в трех точках S_{10}, S_{20}, S_{30}, соответствующих вершинам симплекса. Из найденных значений выбирается наибольшее. В рассматриваемом примере – это S_{10} (рис. 3.12).

2 Строится новый симплекс, для этого вершина S_{10} исходного симплекса заменяется вершиной S_{11}, расположенной симметрично вершине S_{10} относительно центра грани, расположенной против вершины S_{10}. Построение нового симплекса $S_{20}\,S_{30}\,S_{11}$ осуществляется определением центра A стороны $S_{20}\,S_{30}$ треугольника $S_{10}\,S_{20}\,S_{30}$, после чего проводится прямая $S_{10}A$, на продолжении которой откладывается отрезок AS_{11} равный $S_{10}A$.

3 Вычисляется значение целевой функции в вершине S_{11}, которое сравнивается с известными значениями в вершинах S_{20} и S_{30}. В результате определяется вершина S_{30} с наибольшем значением целевой функции, подлежащая исключению при построении следующего симплекса $S_{11}\,S_{20}\,S_{31}$, и т.д.

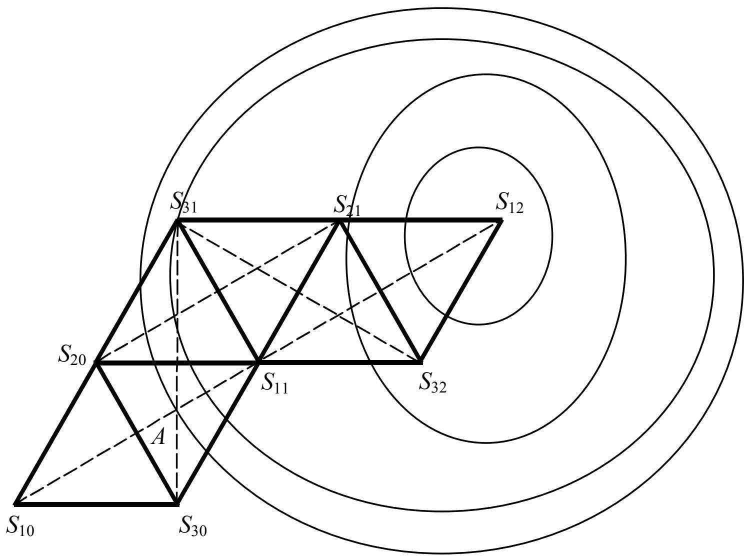


Рис. 3.12 Поиск оптимума симплексным методом

Исключение из рассмотренных вершин симплексов с наибольшим значением целевой функции приводит к сходимости процесса к минимальному значению.

При использовании симплексного метода возможно зацикливание вблизи оптимума, которое приводит к тому, что при исключении вершины образуется не новый, а предыдущий симплекс. Для устранения зацикливания достаточно изменить размеры симплекса в сторону его уменьшения, т.е. уменьшить шаг спуска в районе оптимума. Если зацикливание возникает вновь, то размеры симплекса уменьшаются до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность определения оптимума.

Критерием окончания поиска могут служить размеры симплекса. Поиск можно прекратить, если все ребра симплекса станут меньше заданной достаточно малой величины.

3.4.5 Поиск при наличии "оврагов" целевой функции

Если целевая функция имеет "овраги", то рассмотренные методы поиска экстремума этой функции малоэффективны, так как будет найдено дно "оврага", и далее применяемые методы застрянут на этом дне. Поэтому для решения оптимальных задач, в которых целевая функция имеет особенности типа "оврагов" разработаны специальные методы. Одним из таких методов является метод шагов по "оврагу", алгоритм которого заключается в следующем.

1 Все независимые переменные разбиваются на две группы: первая группа включает в себя переменные, изменение которых существенно влияет на значение целевой функции, вторая группа содержит переменные, при изменении которых значение целевой функции изменяется не столь значительно.

2 Выбирается начальная точка u_0 , из которой производится поиск, будем считать для определенности, минимума любым методом локального поиска. Этот поиск закончится на дне "оврага", в результате чего будет найдена некоторая критическая точка u_1 (рис. 3.13).

3 Из выбранной начальной точки u_0 делается шаг в направлении наибольшего изменения переменных, несущественно влияющих на значение целевой функции, При этом получается некоторое состояние u_0^1 (рис. 3.13).

4 Из состояния u_0^1 производится поиск минимума, в результате которого определяется еще одна критическая точка u_2, расположенная на дне "оврага" (рис. 3.13).

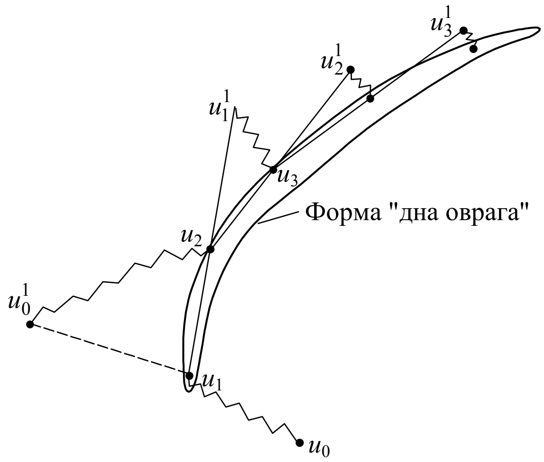


Рис. 3.13 Метод "оврагов"

5 Две найденные критические точки u_1 и u_2 соединяются прямой и выполняется "шаг по оврагу" в направлении убывания целевой функции. Это дает новое исходное состояние u_1^1.

6 Из состояния u_1^1 производится спуск на "дно оврага" и находится критическая точка u_3. Далее определяется состояние u_2^1 и т.д. (рис. 3.13).

Процесс поиска продолжается до тех пор, пока значение целевой функции во вновь найденной критической точке u_{k+1} Q (u_{k+1}) не окажется больше, чем в предыдущей точке u_k – Q (u_k). Минимум в этом случае находится между точками u_{k-1} и u_{k+1}. Далее процесс поиска можно повторить, но уже с меньшими "шагами по оврагу", пока не будет достигнута требуемая точность.

В результате поиска могут возникнуть различные ситуации. Например, когда все переменные примерно одинаково влияют на значение оптимизируемой функции, но, тем не менее, "овраг" существует. В этом случае для поиска состояния u_0^1 можно сделать любой шаг из начального состояния u_0, далее поиск продолжается по описанному выше алгоритму.

3.5 ПОИСК УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

При рассмотрении реальных задач оптимизации на переменные состояния накладываются условия типа равенств или неравенств, которые задают область изменения независимых переменных.

Задача нелинейного программирования в этом случае формулируется следующим образом: требуется найти оптимум (минимум) функции $Q(u_1, ..., u_n)$ при $u \in U$ и условия, что $\varphi_\iota(u_1, ..., u_n) \geq 0$, $\iota = \overline{1, k}$.

Число условий типа неравенств может быть любым, т.е. меньше или больше числа независимых переменных. Если при решении такой задачи экстремум целевой функции будет находится внутри допустимой области изменения независимых переменных u_ι, $\iota = \overline{1, n}$, ограниченной неравенствами $\varphi_\iota(u_1, ..., u_n) > 0$, то в некоторых случаях эту задачу можно решить рассмотренными выше методами поиска без учета ограничений. Вести поиск подобным образом при наличии условий типа равенств обычно невозможно. Если же экстремум целевой функции будет расположен на границе допустимой области, то для его отыскания применяют специальные методы.

3.5.1 Метод проектирования вектора-градиента

При решении задач поиска максимума функции Q $(u_1, ..., u_n)$ с ограничениями типа неравенств вида $\varphi_\iota(u_1, ..., u_n) > 0$, $\iota = \overline{1, k}$ часто используется метод проектирования вектора-градиента.

Согласно этому методу движение к оптимуму происходит вдоль границы допустимой области. Степень нарушения ограничений определяется функцией $H(u) = \sum_{\iota=1}^{k} \varphi_\iota^*(u)$, где $\varphi_\iota^* = \begin{cases} \varphi_\iota(u), \text{ при } \varphi_\iota(u) > 0 \\ 0, \text{ при } \varphi_\iota \leq 0 \end{cases}$, т.е. внутри допустимой области U функция H (u) тождественно равна нулю. При таком подходе к решению задачи положение точки при выполнении очередного шага должны оставаться за пределами области U, где градиент функции $H(u)$ отличен от нуля. Если в результате выполнения очередного шага произойдет слишком большое нарушение ограничений, то коррекция этого нарушения должна осуществляться до того положения, пока функция $H(u)$ еще отлична от нуля.

Движение вдоль границы ограничений будет продолжаться до тех пор, пока не будет выполняться условие $(\nabla Q, \nabla H) < 0$, т.е. пока искомый оптимум находится за пределами касательной плоскости, проведенной через рассматриваемую точку, расположенную на границе. Иллюстрация метода представлена на рис. 3.14.

Если условие $(\nabla Q, \nabla H) < 0$ оказывается нарушенным, то происходит "отрыв" от границы области U и дальнейший подъем будет происходить уже без влияния ограничений (рис. 3.14, точка u_3).

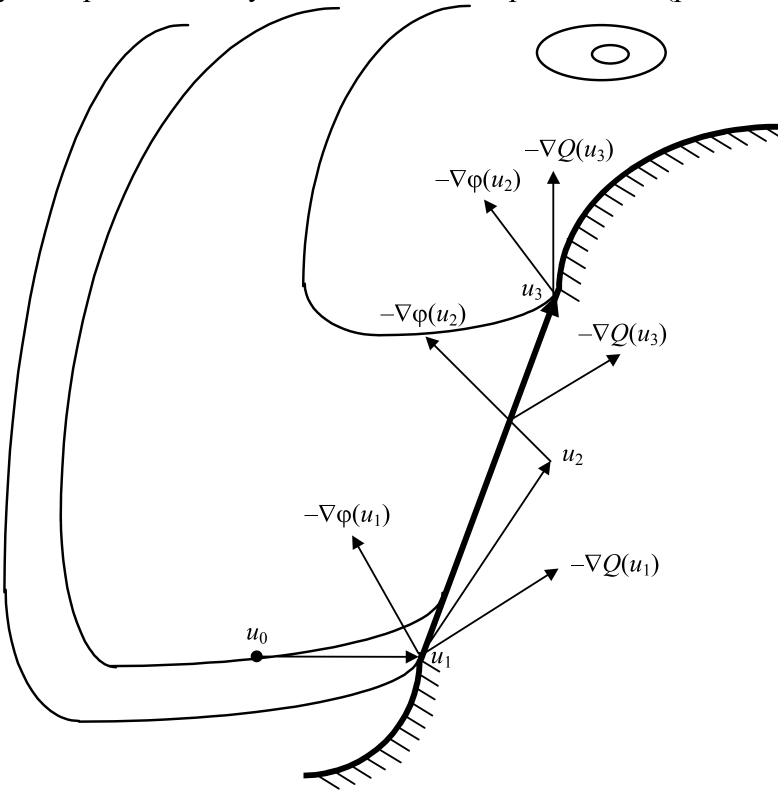


Рис. 3.14 Поиск оптимума методом проектирования вектора-градиента при наличии ограничений типа неравенств

3.5.2 Метод ажурной строчки

Этот метод заключается в зигзагообразном движении вдоль границы. Идея этого метода при использовании его в задачах с ограничениями типа неравенств, а также равенств заключается в следующем.

Без учета ограничений ищется оптимум любым методом спуска до тех пор пока некоторые неравенства не будут нарушены. Как только произойдет нарушение одного или нескольких ограничений спуск прекращается и осуществляется возврат в допустимую область изменения переменных u_i по направлению антиградиентов к тем гиперповерхностям, ограничения которых оказались нарушенными.

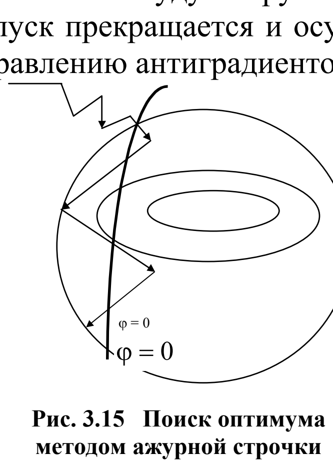


Рис. 3.15 Поиск оптимума методом ажурной строчки

Таким образом, выбирая в качестве поискового метода метод градиента, движемся до границы и попадаем в запрещенную точку. Далее забываем о целевой функции и движемся вдоль границы (рис. 3.15).

Вычисляется градиент функции $\varphi(u)$ и осуществляется возврат в допустимую область. Следующий шаг делается опять по градиенту целевой функции $Q(u)$ и т.д.

Сложность метода заключается в выборе алгоритма уменьшения шага и правила остановки. Это зависит от опыта и способностей программиста и определяется его творчеством.

3.6 ГЛОБАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Исследуемая функция может иметь несколько экстремумов. Если для всех значений независимых переменных выполняется условие $Q(u_{опт}) \le Q(u)$, $u \in U$, то экстремум в точке $u_{опт}$ называется глобальным, другие экстремумы называются локальными.

Поскольку заранее число экстремумов функции $Q(u)$ неизвестно, то для нахождения глобального экстремума необходимо, вообще говоря, найти и проверить все без исключения локальные экстремумы, имеющиеся у целевой функции решаемой задачи. С этой целью осуществляется поиск из различных начальных точек, для чего область изменения независимых переменных u_i покрывается сеткой и начальная точка u_{i0} выбирается из областей, полученных в результате проведенного сканирования.

Также для поиска глобального экстремума используют случайный поиск, в частности, методы Монте-Карло. Здесь экстремум находится с какой-то вероятностью.

В заключение следует отметить, что большое разнообразие методов нелинейного программирования свидетельствует, прежде всего, о сложности проблемы поиска и трудностях в оценке эффективности использования того или иного метода при решении конкретной задачи. Следует сопоставлять практическую эффективность вычислительных возможностей разных методов.

Методы нелинейного программирования служат не только для решения специфических задач, но являются также необходимым средством, к которому обращаются при решении оптимальных задач, а также задач вычислительной математики.

По мере развития математического моделирования роль этих методов будет несомненно вырастать, что приведет к более глубокой разработке существующих и созданию новых алгоритмов поиска экстремума в задачах нелинейного программирования.

3.7 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

П р и м е р 3.1

Найти максимум функции $Q(u_1, u_2) = -2u_1^2 + 2u_1, u_2 - u_2^2$ при условии

$$\varphi_1(u_1, u_2) = -2u_1 + 5u_2 - 30 \le 0,$$

$$\varphi_2(u_1, u_2) = 4u_1 + 5u_2 - 60 \le 0,$$

$$\varphi_3(u_1, u_2) = 4u_1 - 5u_2 - 20 \le 0,$$

$$\varphi_4(u_1, u_2) = -u_1 \le 0,$$

$$\varphi_5(u_1, u_2) = -u_2 \le 0$$

методом наискорейшего спуска.

В качестве начального приближения выбирается точка $u^0(1, 0)$, для которой условия принимают следующие значения $\varphi_1(u^0) = -32$, $\varphi_2(u^0) = -56$, $\varphi_3(u^0) = -16$, $\varphi_4(u^0) = -1$, $\varphi_5(u^0) = 0$, т.е. выполняются.

Для нахождения направления спуска $\Delta u^1 = (\Delta u_1, \Delta u_2)$ необходимо найти частные производные функции $Q(u_1, u_2)$ в точке u^0:

$$\frac{\partial Q(u_1, u_2)}{\partial u_1} = -4u_1 + 2u_2, \quad \frac{\partial Q(u_1, u_2)}{\partial u_1} \Big/ u^0 = -4;$$

$$\frac{\partial Q(u_1, u_2)}{\partial u_2} = +2u_1 - 2u_2, \quad \frac{\partial Q(u_1, u_2)}{\partial u_2} \Big/ u^0 = 2,$$

и решить следующую задачу линейного программирования.

Найти минимум функции $F = \frac{\partial Q}{\partial u_1}\Delta U_1 + \frac{\partial Q}{\partial u_2}\Delta U_2$ для нашего случая $F = -4\Delta u_1 + 2\Delta u_2$ при условиях $-\Delta u_2 \le 0$ (так как $\varphi_5(u^0) = 0$), $|\Delta u_1| \le 1$, $|\Delta u_2| \le 1$.

Решение этой задачи дает, что $\Delta u_1 = 1$, $\Delta u_2 = 0$, $\min F = -4$.

Новое приближение u^1 определяется как $u^1 = u^0 + t\Delta u^1$, где t – величина шага, определяемая из соотношения $t = \min\limits_{t'>0,\ t''>0}(t',\ t'')$, где $t' = \frac{\min F}{2[B\Delta u^1,\ \Delta u]}$, t'' – наименьшее положительное число среди отношений

$$\frac{\varphi_\iota(u^0)}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_{\iota j}\Delta u_i},\quad \iota = 1, 2, 3, 4, 5.$$

B – матрица, состоящая из коэффициентов функции $Q(u_1,\ u_2)$: $b_{11} = -2$, $b_{12} = 1$, $b_{21} = 1$, $b_{22} = -1$; $a_{\iota j}$ – коэффициент функций $\varphi_\iota(\xi)$.

Таким образом, имеем, что

$$t = -1 < 0,\ t'' = \min\left\{\frac{\varphi_2(u^0)}{\sum\limits_{j=1}^{2} a_{2j}\Delta u_j} = \frac{56}{4};\ -\frac{\varphi_3(u^0)}{\sum\limits_{j=1}^{2} a_{3j}\Delta u_j} = 4\right\} = 4,$$

отсюда $t = 4$.

Координаты точки u^2: $u_1^1 = 1 + 4 = 5,\ u_2^1 = 0.$ Значения условий для этой точки: $\varphi_1(u^1) = -40,\ \varphi_2(u^1) = -40,\ \varphi_3(u^1) = 0,\ \varphi_4(u^1) = -5,\ \varphi_5(u^1) = 0.$

Для нахождения очередного направления спуска $\Delta u^2 = (\Delta u_1, \Delta u_2)$ необходимо решить следующую задачу линейного программирования: найти минимум функции $F = -20\Delta u_1 + 10\Delta u_2$ при условиях $4\Delta u_1 - 5\Delta u_2 \le 0$,
$-\Delta u_2 \le 0$, $|\Delta u_1| \le 1$, $|\Delta u_2| \le 1$.

Решение этой задачи дает $\Delta u_1 = 1$, $\Delta u_2 = \frac{4}{5}$, при этом $\min F = -\frac{96}{5}$.

Величина шага t: $t' = -\frac{96}{4} < 0,\ t'' = \min(20;\ 5) = 5,$ следовательно новое приближение $u^2 = u^1 + t\,\Delta u^2$, или $u_1^2 = 10,\ u_2^2 = 4.$

Значение условий для точки u^2:

$$\varphi_1(u^2) = -30,\ \varphi_2(u^2) = 0,\ \varphi_3(u^2) = 0,\ \varphi_4(u^2) = -10,\ \varphi_5(u^2) = -4.$$

Для определения следующего направления решается задача линейного программирования: найти минимум $F = -32\Delta u_1 + 12\Delta u_2$ при условиях $4\Delta u_1 + 5\Delta u_2 \le 0$, $4\Delta u_1 - 5\Delta u_2 \le 0$, $|\Delta u_1| \le 1$, $|\Delta u_2| \le 1$.

Решением этой задачи будет $\Delta u_1 = 0$, $\Delta u_2 = 0$, $\min F = 0$. Следовательно $u^2 = (10,4)$ является оптимальным решением $\min Q(u_1, u_2) = -136$.

Пример 3.2

Найти максимальное значение функции $Q(u_1,\ u_2) = -u_1^2 - u_2^2$ при условиях: $(u_1 - 7)^2 + (u_2 - 7)^2 \le 18,\ u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0$ методом штрафных функций.

На рис. 3.16 представлена область допустимых решений и линии уровня, определяемые целевой функцией $Q(u_1, u_2)$. Этими линиями являются окружность с центром в точке (0, 0). Точка касания одной из этих окружностей с областью допустимых решений и является точкой максимального движения целевой функции.

Используя штрафную функцию, последовательно переходят от одной точки к другой до тех пор, пока не получат приемлемое решение.

При этом координаты последующей точки находят по формуле

$$u_j^{k+1} = \max\left\{0;\ u_j^k + \lambda\left[\frac{\partial Q\left(u^k\right)}{\partial u_j} + \sum_{\imath=1}^{2} di \frac{\partial g\left(u^k\right)}{\partial x_j}\right]\right\}.$$

Положим u^0 = (6,7), $\underline{\lambda}$ = 0,1, $g(u_1,u_2) = 18 - (u_1 - 7)^2 - (u_2 - 7)^2$ и определим частные производные от целевой и штрафной функций

$$\frac{\partial Q}{\partial u_1} = -2u_1,\quad \frac{\partial g}{\partial u_1} = -2u_1 + 14;\quad \frac{\partial Q}{\partial u_2} = -2u_2,\quad \frac{\partial g}{\partial u_2} = -2u_2 + 14.$$

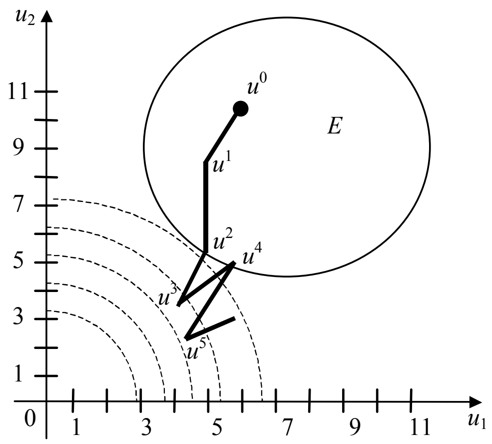


Рис. 3.16 Допускаемая область и линии уровня целевой функции

I *итерация.* Так как точка u^0 = (6,7) принадлежит области допустимых решений задачи, то второе слагаемое в квадратных скобках формулы для определения последующей точки равно нулю. Следовательно координаты точки u^1 вычисляются по формулам:

$$u_1^1 = \max\left\{0;\ u_1^0 + \lambda\frac{\partial Q\left(u^0\right)}{\partial u^1}\right\} = \max\left\{0;\ 6 + 0{,}1(-2)6\right\} = 4{,}8;$$

$$u_2^1 = \max\left\{0;\ u_2^0 + \lambda\frac{\partial Q\left(u^0\right)}{\partial u^2}\right\} = \max\left\{0;\ 7 + 0{,}1(-2)7\right\} = 5{,}6.$$

Для определения принадлежности этой точки области допустимых решений задачи необходимо найти $g(u^1)$ = 11,2, так как $g(u^1)$ > 0, то u^1 принадлежит области допустимых решений. В этой точке $Q\ (u^1)$ = –54,4.

II *итерация.* Находим:

$$u_1^2 = \max\left\{0;\ 4{,}8 + 0{,}1(-2)4{,}8\right\} = 3{,}84;$$

$$u_2^2 = \max\left\{0;\ 5{,}6 + 0{,}1(-2)5{,}6\right\} = 4{,}48;$$

$$g\left(u^2\right) = 1{,}664 > 0;\ Q\left(u^2\right) = -34{,}816.$$

III *итерация.* Находим:

$$u_1^3 = \max\left\{0;\ 3{,}84 + 0{,}1(-2)3{,}84\right\} = 3{,}072;$$

$$u_2^3 = \max\left\{0;\ 4{,}48 + 0{,}1(-2)4{,}48\right\} = 3{,}584;$$

$$g\left(u^3\right) \approx -9{,}096.$$

IV *итерация.* Найденная точка u^3 не принадлежит области допустимых решений задачи. Следовательно

$$u_1^4 = \max\left\{0;\ u_1^3 + \lambda\left[\frac{\partial Q\left(u^3\right)}{\partial u_1} + \alpha\frac{\partial g\left(u^3\right)}{\partial u_1}\right]\right\} = \max\left\{0;\ 2{,}4576 + \alpha 0{,}7856\right\};$$

$$u_2^4 = \max\left\{0;\ u_2^3 + \lambda\left[\frac{\partial Q\left(u^3\right)}{\partial u_2} + \alpha\frac{\partial g\left(u^3\right)}{\partial u_2}\right]\right\} = \max\left\{0;\ 2{,}8672 + \alpha 0{,}6832\right\}.$$

Здесь возникает вопрос о выборе числа α. Наиболее целесообразно взять его так, чтобы точка u^4 не слишком далеко удалялась от границы области допустимых решений и вместе с тем принадлежала этой области. Этим требованием удовлетворяет $\alpha = 1{,}9$ и следовательно:

$$u_1^4 = \max\left\{0;\ 2{,}4576 + 1{,}9 \cdot 0{,}7856\right\} \approx 3{,}95;$$

$$u_2^4 = \max\left\{0;\ 2{,}8672 + 1{,}9 \cdot 0{,}6832\right\} \approx 4{,}165;$$

$$g\left(u^4\right) \approx 0{,}66 > 0;\ Q\left(u^4\right) \approx -32{,}95.$$

V *итерация.* Находим

$$u_1^5 = \max\left\{0;\ 3{,}95 + 0{,}1(-2)3{,}953\right\} = 3{,}16;$$

$$u_2^5 = \max\left\{0;\ 4{,}165 + 0{,}1(-2)4{,}165\right\} = 3{,}33;$$

$$g\left(u^5\right) \approx -10{,}2 < 0.$$

VI *итерация.* Находим

$$u_1^6 = \max\left\{0;\ 3{,}16 + 0{,}1\left[(-2)\cdot 3{,}16 + 1{,}9\cdot\left((-2)\cdot 3{,}16 + 14\right)\right]\right\} \approx 3{,}987;$$

$$u_2^6 = \max\left\{0;\ 3{,}33 + 0{,}1\left[(-2)\cdot 3{,}33 + 1{,}9\cdot\left((-2)\cdot 3{,}33 + 14\right)\right]\right\} \approx 4{,}06;$$

$$g\left(u^6\right) \approx 0{,}272 > 0;\ Q\left(u^6\right) \approx -32{,}37.$$

VII *итерация.*

$$u_1^7 \approx 3{,}189;\ u_2^7 \approx 3{,}247;\ g\left(u^7\right) \approx -10{,}61 < 0.$$

VIII *итерация.*

$$u_1^8 \approx 3{,}999;\ u_2^8 \approx 4{,}024;\ g\left(u^8\right) \approx 0{,}137 > 0;\ Q\left(u^8\right) \approx -32{,}185.$$

IX *итерация.*

$$u_1^9 = 3{,}201;\ u_2^9 = 3{,}219;\ g\left(u^9\right) \approx -10{,}728 < 0.$$

X *итерация.*

$$u_1^{10} = 4{,}004;\ u_2^{10} = 4{,}012;\ g\left(u^{10}\right) = 0{,}096 > 0;\ Q\left(u^{10}\right) = -32{,}128.$$

XI *итерация.*

$$u_1^{11} = 3{,}203;\ u_2^{11} = 3{,}21;\ g\left(u^{11}\right) = -10{,}781 < 0.$$

XII *итерация.*

$$u_1^{12} = 4{,}005;\ u_2^{12} \approx 4{,}008;\ g\left(u^{12}\right) = 0{,}079;\ Q\left(u^{12}\right) = -32{,}104.$$

Сравнивая значения целевой функции, найденные в точках, полученных после X и XII итераций, видно, что они с точностью до 0,1 совпадают. Это говорит о близости точки, найденной на последней итерации, к точке максимального значения целевой функции. Эта точка u^{12} находится вблизи границы области допустимых решений и ее можно считать приемлемым решением задачи. При необходимости можно уточнить дальнейшими шагами найденное решение.

4 ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейное программирование является составной частью задач математического программирования, в которых критерий оптимальности задается в виде линейной функции от входящих в него переменных, кроме того, на эти переменные накладываются некоторые ограничения в форме линейных равенств и неравенств.

4.1 КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Математические исследования отдельных экономических проблем, математическая формализация статистического материала проводилась еще в XIX веке. Так, при математическом анализе процесса расширенного воспроизводства использовались преимущественно алгебраические соотношения. Потребности планируемой управляемой экономики, характерной для XX века, привели к необходимости располагать конкретными экономическими показателями и характеристиками. Это привело к созданию системы межотраслевого баланса, послужившего толчком в разработке и исследовании математических моделей экономических систем и ситуаций.

В 1936 году появилась первая публикация американского экономиста и статистика В.В. Леонтьева о межотраслевой модели производства и распределении продукции США, которая вошла в литературу под названием метода анализа экономики "затраты – выпуск".

В 1938 году русский математик Л.В. Канторович, изучая практическую задачу выбора наилучшей производственной программы загрузки лущильных станков, отметил, что эта задача на максимум при ограничениях в виде линейных неравенств весьма своеобразна и не поддается решению известными средствами классического анализа. Эта задача не является случайной, как стало ясно, а является типичным представителем нового, не исследованного класса задач, к которым приводят различные вопросы нахождения наилучшего производственного плана. В 1939 году появилась работа Л.В. Канторовича "Математические методы организации и планирования производства", открывшая новый этап в развитии экономико-математических методов – методов линейного программирования, которые долгое время почти не разрабатывались и в практику не внедрялись.

Термин "линейное программирование" появился впервые только в 1951 году в работах Дж. Б. Данцига и Т. Купманса (США). В эти же годы Дж. Б. Дансингом разработан эффективный метод решения задач линейного программирования – симплекс метод.

Наиболее эффективно линейное программирование развивалось в СССР и США в 1955 – 65 годах, именно в этот период оно было одним из наиболее "модных" разделов прикладной математики. В настоящее время линейное программирование стало важным инструментом современной теоретической и прикладной математики.

4.2 ТИПИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача об оптимальном выпуске продукции

Эта задача возникает при составлении планов выпуска продукции предприятием и поэтому имеет важное практическое значение.

Предприятие выпускает n наименований продукции. Затраты ι-го вида ресурсов ($\iota = \overline{1, m}$) на производство единицы продукции j-го вида ($j = \overline{1, n}$) составляют $a_{\iota j}$; полный объем имеющихся ресурсов – b_ι ($\iota = \overline{1, m}$); прибыль, получаемая предприятием при изготовлении и реализации единицы ι-го вида продукта – c_ι; a_ι и A_ι – задаваемая нижняя и верхняя границы по объему выпуска ι-го вида продукции.

Требуется составить такой план выпуска продукции, который был бы технологически осуществлен по имеющимся ресурсам всех видов, удовлетворял бы задаваемым ограничениям на выпуски каждого вида продукции и в то же время приносил бы наибольшую прибыль предприятию.

Таким образом, задача математически заключается в следующем: найти такой план выпуска продукции $U = (u_1, ..., u_n)$, чтобы выполнялись технологические ограничения $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \le b_i$, $\iota = \overline{1, m}$, и ограничения на объемы отдельных видов выпускаемой продукции $a_j \le u_j \le A_j$, $j = \overline{1, n}$ и при этом достигалась бы максимальная общая прибыль от производства и реализации продукции – $\max \sum_{j=1}^{n} c_i u_i$.

Задача оптимизации межотраслевых потоков

Каждая из n отраслей хозяйства производит только свой один специфический вид продукции, используемый в дальнейшем в производстве во всех n отраслях (в частности, в нулевом количестве). Если y_i – объем производства в ι-й отрасли, u_ι – объем продукта ι-го вида для внепроизводственного потребления, $a_{\iota j}$ – коэффициенты прямых затрат продукции j-го вида на производство в ι-й отрасли единицы продукции ι-го вида, N_ι – максимально возможный объем производства в ι-й отрасли, d_ι – требуемое для внепроизведенного потребления количество продукции ι-го вида, C_ι – стоимость единицы продукции ι-го вида, то задача ставится следующим образом.

Требуется найти такие объемы производства y_ι и такой план выпуска конечной продукции u_ι ($\iota = \overline{1, n}$), при котором максимизируется общая стоимость произведенного конечного продукта – $\max \sum_{\iota=1}^{n} C_\iota u_\iota$ при выполнении ограничений на объем производства $0 \le y_\iota \le N_\iota$, $\iota = \overline{1, n};$ на выпуск конечного продукта $u_\iota \ge d_\iota$, $\iota = \overline{1, n};$ технологических ограничений на выпуск продукции $y_\iota \ge \sum_{j=1}^{n} a_{\iota j} x_j + u_\iota$, $\iota = \overline{1, n}$.

Транспортная задача

Подобная задача возникает в своем простейшем варианте, когда речь идет о рациональной перевозке некоторого однородного продукта от производителей к потребителю. Поэтому здесь естественно возникает задача о наиболее рациональном прикреплении транспорта, правильном направлении перевозок груза, при котором полностью удовлетворяются потребности при минимальных затратах на транспортировку. Итак, задача формулируется следующим образом.

Имеется m пунктов производства с объемами производства в единицу времени a_ι, $\iota = \overline{1, m}$ и n пунктов потребления b_ι, $\iota = \overline{1, n}$, естественно, что потребление не должно превышать возможностей производства $\sum_{\iota=1}^{m} a_\iota \ge \sum_{\iota=1}^{n} b_\iota$, затраты на перевозку единицы продукции из ι-го пункта производства в j-й пункт потребления составляют $C_{\iota j}$, а количество перевезенного продукта $u_{\iota j}$.

Требуется составить такой план перевозок, при котором суммарные затраты на них были бы минимальны $\min\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}\,u_{ij}$ при условиях, что в каждый пункт потребления завозится требуемое количество продукта $\sum_{\iota=1}^{m}u_{\iota j}\geq b_j,\ \ j=\overline{1,\,n}$, из каждого пункта производства вывозится не более произведенного количества продукта $\sum_{\iota=1}^{n}u_{\iota j}\leq a_\iota,\ \iota=\overline{1,\,m}$ и перевозимый объем продукта не может быть отрицательным $u_{\iota j}\geq 0,\ \ \iota=\overline{1,\,m},\ \ j=\overline{1,\,n}$.

Задача о выборе производственной программы

Эта задача была одной из первых практических задач линейного программирования, решенная в 1939 году известным русским математиком Л.В. Канторовичем.

На m предприятиях нужно произвести n продуктов в заданном ассортименте l_1, l_2, ..., l_n. Если u_{ij}, $\iota=\overline{1,\,m}$, $j=\overline{1,\,n}$ – рабочее время ι-го предприятия, отводимое под j-й продукт, a_{ij} – производительность ι-го предприятия в единицу времени по выпуску j-го продукта, то задача о выборе производственной программы для случая, когда продукция дефицитна, производственные мощности ограничены и должны использоваться максимально полно, ставится следующим образом.

Требуется составить программу работы предприятий – указать время $u_{\iota j}$, отведенное на производство каждого вида продукции на данном предприятии таким образом, чтобы получить максимальный суммарный объем продукции в заданном ассортименте в единицу времени, т.е. необходимо найти $u_{\iota j}$ из условий, что время не может быть отрицательным $u_{\iota j} > 0$, сумма всех временных долей не превосходит полного времени работы предприятия $\sum_{j=1}^{n}u_{\iota j}\leq 1,$ количество ассортиментных наборов продуктов максимально $\max Z=\max,\min\left(\dfrac{y_j}{l_j}\right),$ где $y_j=\sum_{\iota=1}^{m}a_{\iota j}\,u_{\iota j}$ – количество j-го продукта, произведенного на всех предприятиях.

Рассмотренные типы задач, решаемые методом линейного программирования, относятся к классу экономических задач. Этим методом решаются также задачи и других классов, например, о выборе диеты или определении лучшего состава смеси, о рациональном использовании посевных площадей, о рациональном использовании трудовых ресурсов. Линейное программирование используется в различных расчетах химической технологии и т.д.

Несмотря на различное содержание задач, их физическую суть, математические постановки этих задач имеют много общего. В каждой из них требуется максимизировать или минимизировать некоторую линейную функцию нескольких переменных, ограничения, положенные на совокупность этих переменных являются либо линейными уравнениями, либо линейными неравенствами. Поэтому ниже рассматривается только математическая постановка задачи линейного программирования и методы ее решения.

4.3 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общая задача линейного программирования [2] заключается в отыскании вектора (u_1, u_2, ..., u_n) максимизирующего критерий оптимальности (функцию цели задачи)

$$Q\,(u)=C_1u_1+C_2u_2+\ldots+C_nu_n \tag{4.1}$$

при ограничениях линейного типа в виде равенств:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n = b_1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n = b_m, \end{cases} \tag{4.2}$$

в виде неравенств:

$$\begin{cases} a_{m+11}u_1 + a_{m+12}u_2 + \ldots + a_{m+1n}u_n \le b_{m+1}, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{c1}u_1 + a_{c2}u_2 + \ldots + a_{cn}u_n \le b_c, \end{cases} \tag{4.3}$$

и ограничениях на переменные состояния

$$u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0,\ \ldots,\ u_n \ge 0. \tag{4.4}$$

Эта задача при наличии двух переменных u_1 и u_2 имеет наглядное геометрическое представление.

Пусть целевая функция имеет вид $Q(u) = C_1u_1 + C_2u_2$. На плоскости переменных u_1 и u_2 , если придать $Q(u)$ некоторое постоянное значение $Q(u) = \text{const}$, например, является не чем иным как линиями равного значения уровня. Причем, при $u_2 = u_1 = 0$ эта линия сжимается в точку (рис. 4.1), при $Q^0 = 0$ имеем $C_1u_1 + C_2u_2 = 0$ и линия равного уровня является прямой линией, проходящей через точки $\left(\frac{Q_0}{C_1}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{Q_0}{C_2}\right)$.

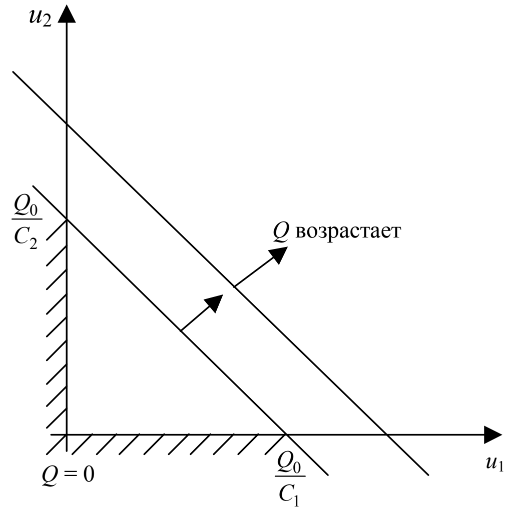


Рис. 4.1 Геометрическое представление целевой функции

Если теперь эту линию перемещать параллельно самой себе (рис. 4.1), то величина Q_0, а, следовательно, и значение целевой функции $Q(u)$ будет изменяться. Увеличению целевой функции соответствует перемещение в направлении, указанном на рис. 4.1 стрелкой.

Ограничения или условия типа равенств, называемые также связью, на плоскости u_1, u_2 изображаются так же, как целевая функция, прямыми линиями (рис. 4.2). Если связь $a_{11}u_1 + a_{12}u_2 = b_1$, то ей "убивается" одна степень свободы, т.е. число переменных, которыми можно варьировать, определяется разностью между числом переменных u_ι, $\iota = \overline{1, n}$ и числом ограничений типа равенств (m) – $\nu = n - m\,(m < n)$. Эти переменные называются свободными переменными, а число ν определяет число степеней свободы.

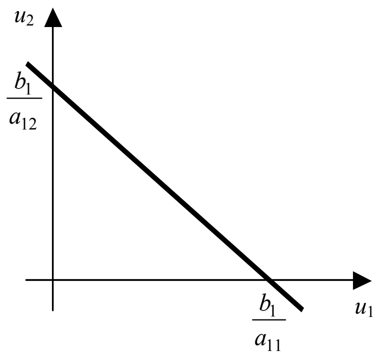


Рис. 4.2 Геометрическое представление связей типа равенства

Ограничения типа неравенств оставляют ту же степень свободы, поэтому их может быть сколько угодно. Эти ограничения определяют только область допустимых решений.

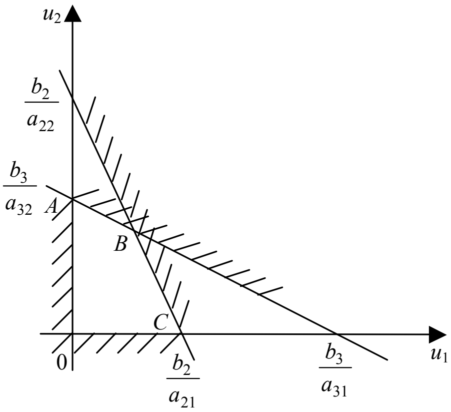


Рис. 4.3 Геометрическое представле-

Неравенства $a_{21}u_1 + \; + a_{22}u_2 \le b_2,\; a_{31}u_1 + a_{32}u_2 \le b_3$ разделяют всю плоскость
(u_1, u_2) на две области: запрещенную и разрешенную (рис. 4.3). Как правило, при геометрическом представлении ограничений типа неравенств на плоскости наносят штриховку в сторону запрещенной области. На рис. 4.3 разрешенной областью является область $ABC0$, эта область всегда представляет собой выпуклый многогранник.

В задачах линейного программирования принято максимизировать функцию цели Q, поэтому оптимальное решение всегда лежит в вершине допустимого многогранника, образованного ограничениями.

Пример 4.1.

Пусть $Q(u) = u_1 + u_2 \to \max$, при наличии ограничений на переменные состояния $2u_1 + u_2 \le 1$, $u_1 + 2u_2 \le 1$, $u_1 \ge 0, u_2 \ge 0$.

На фазовой плоскости U определяется область допустимых решений $ABC0$, которая ограничивается прямыми линиями $2u_1 + u_2 = 1$, $u_1 + 2u_2 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ (рис. 4.4).

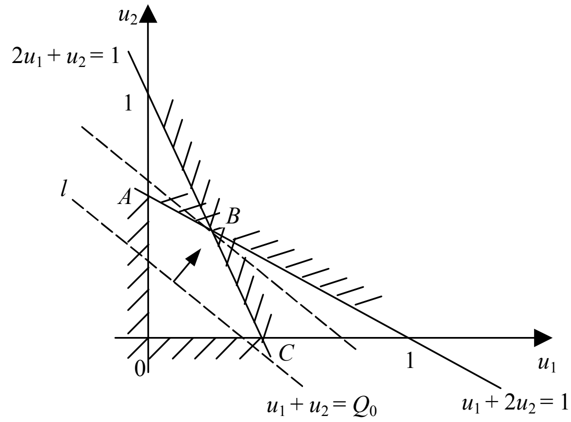


Рис. 4.4 Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Необходимое условие экстремума функции дает, что $\frac{\partial Q}{\partial u_1} = 1,\; \frac{\partial Q}{\partial u_2} = 1,$ эти производные непрерывны и не обращаются в нуль, следовательно, экстремальное значение Q достигается лишь на границе области U. Критерий оптимальности имеет постоянное значение Q_0 вдоль линии l, определяемой уравнением $u_1 + u_2 = Q_0$. Если эту линию перемещать параллельно самой себе, то величина Q_0, а, следовательно, и значение критерия $Q(u)$ будет изменяться. Увеличению критерия оптимальности соответствует перемещение линии в направлении, указанном стрелкой, ее предельное положение, когда она проходит через точку B, являющуюся вершиной многоугольника $ABC0$ допустимых решений, отвечает максимальному значению $Q(u)$. Это максимальное значение определяется координатами вершины B, т.е. координатами точки пересечения уравнений $2u_1 + u_2 = 1$, $u_1 + 2u_2 = 1$; $u_{1\text{опт}} = \frac{1}{3};\; u_{2\text{опт}} = \frac{1}{3} Q_{\max} = \frac{2}{3}.$

Если одна из границ допустимой области будет параллельна линии l, то в этом случае задача линейного программирования имеет в качестве решения бесконечный набор независимых переменных u_1 и u_2. Критерий оптимальности достигает своего максимального значения вдоль всей линии соответствующего ограничения.

Если допустимая область решений является незамкнутой областью, то максимальное значение критерия оптимальности обеспечивается при бесконечно больших значениях переменных u_1 и u_2.

4.4 КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Различные методы задач линейного программирования предъявляют определенные требования к типам ограничений. Так, некоторые из них требуют, чтобы ограничения были только типа равенств, т.е. $Q(u) = C_1u_1 + C_2u_2 + ... + C_nu_n \to \max$, при условии

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ..., + a_{1n}u_n = b_1;$$

$$a_{21}u_2 + a_{22}u_2 + ..., + a_{2n}u_n = b_2;$$

$$...$$

$$a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ..., + a_{mn}u_n = b_m;$$

$$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_n \geq 0.$$

Задача линейного программирования в такой постановке получила название канонической формы задачи линейного программирования.

Общую задачу линейного программирования (4.1) – (4.4) можно свести к канонической форме введением дополнительных переменных $u_{n+1},\ i = \overline{1,\ l-m}$. Для этого в каждом неравенстве прибавляется дополнительная переменная, которая превращает неравенство в равенство

$$a_{m+1_1}u_1 + a_{m+1_2} + .., + a_{m+1_n}u_n + u_{n+1} = b_{m+1},$$

$$... \qquad ,$$

$$a_{l_1}u_1 + a_{l_2}u_2 + ..., + a_{l_n}u_n + u_{n+l-m} = b_l$$

тогда система ограничений может быть записана в единой форме

$$\sum_{j=1}^{n+l-m} a_{ij}u_j = b_\iota, \quad \iota = \overline{1,\ l}.$$

Дополнительные переменные формально могут быть включены в критерий оптимальности исходной задачи, т.е.

$$Q(u) = \sum_{\iota=1}^{n+l-m} C_\iota u_\iota, \text{ где } C_\iota = 0 \text{ для } \iota > n.$$

Таким образом, общую задачу линейного программирования (4.1) – (4.4) свели к канонической форме

$$Q(u) = \sum_{\iota=1}^{n+j-m} C_\iota u_\iota \to \max \tag{4.5}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n+l-m} a_{ij}u_j = b_\iota,\ \iota = \overline{1,\ l},\ u_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ n+l-m}. \tag{4.6}$$

Геометрическое представление можно осуществить только в случае двух переменных. Пусть требуется найти максимум функции $Q(u) = C_1u_1 + C_2u_2$ при ограничениях $a_1u_1 + a_2u_2 < b,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0.$

В рассмотрение вводится дополнительная переменная u_3, которая неравенство $u_3 \geq 0$ превращает в равенство $a_1u_1 + a_2u_2 + u_3 = b$ или $a_1u_1 + a_2u_2 = b - u_3$.

Геометрическое представление получаемой области допустимых решений после введения дополнительной переменной u_3 изображено на рис. 4.5.

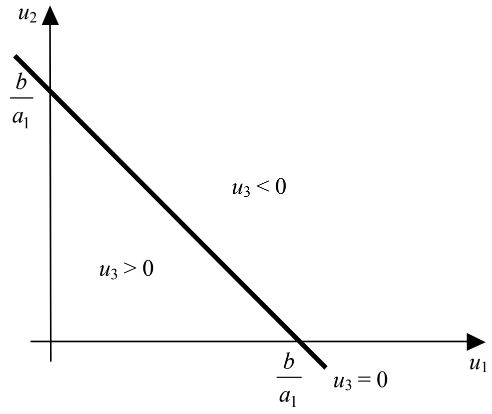


Рис. 4.5 Геометрическое представление сведения ограничений типа неравенств к ограничениям типа равенств

Полученная каноническая задача $Q(u) = C_1 u_1 + C_2 u_1 \to \max$ при ограничениях $a_1 u_1 + a_2 u_2 + u_3 = b,\ u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0,\ u_3 \ge 0$ является равноценной задачей по отношению к исходной.

4.5 СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Основным методом решения задач линейного программирования является симплексный метод. Для его изложения необходимо ввести некоторые определения.

Переменные (u_1, u_2, ..., u_n), удовлетворяющие условиям (4.2) – (4.4) общей задачи линейного программирования называются планом задачи линейного программирования.

План (u_1, u_2, ..., u_n) = U называется опорным, если в разложении $P_0 = \sum_{\iota=1}^{n} u_\iota \rho_\iota$ при $u_\iota > 0$, ρ_ι – линейно независимы.

План, максимизирующий линейный критерий оптимальности (4.1) называется оптимальным планом или решением задачи линейного программирования.

В теории линейного программирования строго доказывается [2], что множество всех планов задачи линейного программирования выпукло. Критерий оптимальности (4.1) достигает своего максимума в крайней точке этой выпуклой области.

Каждой крайней точке выпуклой области соответствует m линейно независимых векторов из системы ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n.

Симплексный метод позволяет, отталкиваясь от известного опорного плана задачи линейного программирования, за конечное число итераций получить ее решение. Так как оптимальный план связан с системой m линейно независимых векторов – базисами плана, то поиски разумно ограничить опорными планами, число которых конечно и равно числу сочетаний из n по m $C_n^m = \frac{n!}{m!}$. Как видно, при больших значениях m и n отыскать решение путем перебора всех опорных планов невозможно. Симплексный метод упорядочивает переход от одного опорного плана к другому таким образом, чтобы критерий оптимальности принимал значение большее или равное предыдущему. Суть алгоритма симплексного метода сводится к следующему.

1 Определяется некоторый опорный план, которому соответствует вершина области допустимых решений $(u_1, u_2, ..., u_n)$.

2 Найденный опорный план (вершина) проверяется на оптимальность. Пусть этот план не оптимален.

3 Определяется следующий опорный план (вершина) лучший по отношению к предыдущему в результате движения по ребру. Найденная таким образом вершина проверяется на оптимальность.

4 Процесс поиска продолжается до тех пор, пока не будет найдена оптимальная вершина, т.е. решение задачи линейного программирования.

Использование симплексного метода удобно рассматривать на примере решения задачи линейного программирования для случая двух переменных.

Пусть требуется изготовить два продукта из четырех видов сырья – S_1, S_2, S_3, S_4. Требуется определить сколько должно быть изготовлено продукта $П_1$ – u_1, продукта $П_2$ – u_2, чтобы стоимость их (прибыль) была максимальна $Q(u) = 7u_1 + 5u_2 \to \max$, где коэффициенты 7 и 5 характеризуют стоимость изготовления единицы продукта $П_1$ и $П_2$ соответственно. Нормы расхода сырья на единицу соответствующего продукта представлены в табл. 4.1.

Количество каждого вида сырья, имеющегося в запасе конечно, поэтому в соответствии с расходными нормами (табл. 4.1) накладываются ограничения на возможность использования того или иного вида сырья.

Таблица 4.1

Продукт / Сырье	$П_1$	$П_2$	Запас сырья
S_1	2	3	19
S_2	2	1	13
S_3	0	3	15
S_4	3	0	18
Цена	7	5	

$$2u_1 + 3u_2 \le 19,$$

$$2u_1 + u_2 \le 13,$$
$$3u_2 \le 15,$$

$$3u_1 \le 18, \quad u_1 \ge 0, \quad u_2 \ge 0.$$

Симплексный метод, как уже отмечалось раньше, работает с канонической формой задач линейного программирования. Для сведения исходной задачи к канонической вводятся дополнительные переменные u_3, u_4, u_5, u_6, позволяющие ограничения типа неравенств $u_1 \ge 0$, $u_2 \ge 0$, $u_3 \ge 0$, $u_4 \ge 0$, $u_5 \ge 0$, $u_6 \ge 0$ преобразовать в ограничения типа равенств

$$2u_1 + 3u_2 + u_3 = 19, \quad 2u_1 + u_2 + u_4 = 13, \quad 3u_2 + u_5 = 15, \quad 3u_1 + u_6 = 18.$$

Таким образом имеем 6 неизвестных, 4-связи, $\nu = 6 - 4 = 2$ степени свободы. В качестве свободных переменных выбираются u_1 и u_2. Полагая $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, определяют вершину, дающую базисное решение. Остальные неизвестные находятся из равенств

$$u_3 = 19 - 2u_1 - 3u_2, \quad u_4 = 13 - 2u_1 - u_2, \quad u_5 = 15 - 3u_2, \quad u_6 = 18 - 3u_1.$$

Строится область допустимых решений, которая изображена на рис. 4.6, на этом же рисунке наносится линия l, соответствующая критерию оптимальности Q.

При $u_1 = u_2 = 0$ критерий оптимальности $Q = 0$. Если u_ι, ι – 1,2 увеличиваются, то и критерий Q увеличивается, следовательно, данная вершина оптимальной не является. Далее необходимо изменять u_1, u_2 таким образом, чтобы критерий увеличивался, т.е. двигаться по ребру, изменяя одну из переменных, а другую оставлять без изменения.

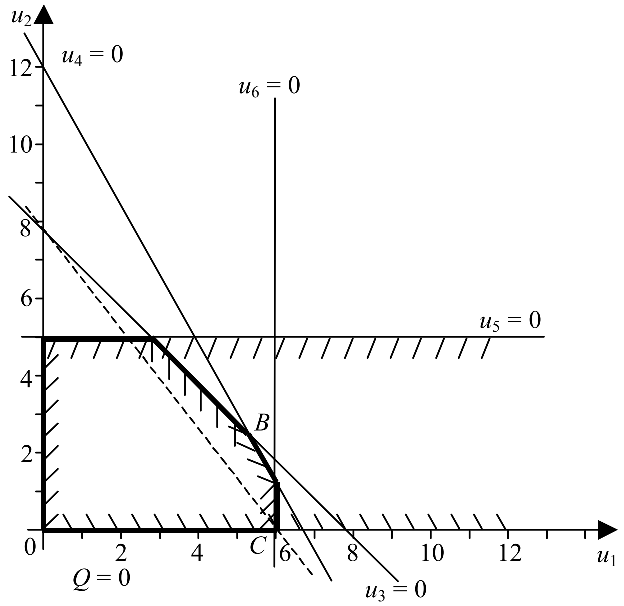


Рис. 4.6 Геометрическое решение задачи линейного программирования

Коэффициент в критерии оптимальности при u_1 больше, чем при u_2, поэтому увеличивать надо u_1 до тех пор, пока не будет достигнута следующая вершина, в которой $u_6 = 0$, а $u_1 = 6$, $u_2 = 0$, $u_3 = 7$, $u_4 = 1$, $u_5 = 15$, $Q = 42$. На этом заканчивается первая итерация.

На второй итерации свободной переменной является u_6, $u_2 = 0$. Все переменные выражаются через u_6 и u_2

$$u_1 = 6 - \frac{1}{3}u_6, \ \ u_3 = 7 + \frac{2}{3}u_6 - 3u_2, \ \ u_4 = 1 + \frac{2}{3}u_6 - u_2,$$

$$u_5 = 15 - 3u_2, \ \ Q = 42 - \frac{7}{3}u_6 + 5u_2$$

В качестве базиса принимается $u_2 = 0$, $u_6 = 0$. Коэффициент в критерии оптимальности при u_6 отрицателен, поэтому для его увеличения необходимо изменить u_2 до значения, при котором $u_4 = 0$, тогда в полученной вершине $u_1 = 6$, $u_2 = 1$, $u_3 = 4$, $u_5 = 12$, $u_6 = 0$, $Q = 47$. Критерий увеличился, можно переходить к третьей итерации.

На третьей итерации в качестве базиса выбираются переменные $u_6 = 0$, $u_4 = 0$. Все переменные выражаются через них:

$$u_1 = 6 - \frac{1}{3}u_6, \ \ u_2 = 1 + \frac{2}{3}u_6 - u_4, \ \ u_3 = 4 - \frac{4}{3}u_6 + 3u_4,$$
$$u_5 = 12 - 2u_6 + 3u_4, \quad Q = 47 + u_6 - 5u_4.$$

Движение до следующей вершины осуществляется по ребру $u_4 = 0$, т.е. изменяется в сторону увеличения u_6 до значения, при котором $u_3 = 0$. Другие переменные принимают значения $u_1 = 5$, $u_2 = 3$, $u_5 = 6$, $u_6 = 3$, $Q = 50$. Критерий увеличился, следовательно, можно проводить четвертую итерацию.

На четвертой итерации за базис берется $u_3 = 0$, $u_4 = 0$, движение проводится по ребру $u_3 = 0$ до значения, при котором $u_5 = 0$, тогда, выражая переменные через u_3 и u_4, получают

$$u_1 = 5 + \frac{1}{4}u_3 - \frac{3}{4}u_4, \;\; u_2 = 3 - \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4, \;\; u_5 = 6 - \frac{3}{2}u_4 + \frac{3}{2}u_3,$$

$$u_6 = 3 + \frac{9}{4}u_4 - \frac{3}{4}u_3, \;\; Q = 50 + \frac{3}{4}u_3 - \frac{9}{2}u_4.$$

В вершине $u_3 = 0$, $u_5 = 0$ имеем $u_1 = 2$, $u_2 = 5$, $u_4 = 4$, $u_6 = 12$, $Q = 27$.

Критерий оптимальности уменьшается, следовательно, оптимальной вершиной является предыдущая, в которой $Q = 50$.

5 ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Целый ряд интересных и важных видов деятельности можно трактовать как многошаговые процессы решения. Применение классических методов в этих новых областях оказалось полезным, но их диапазон и гибкость явно недостаточным, особенно, когда речь шла о получении численных результатов.

Все это привело к созданию новых математических методов и теорий, среди которых была и теория динамического программирования, представляющая собой новый подход, основанный на использовании функциональных уравнений и принципа оптимальности [7].

Одними из основных задач, которые решаются с помощью метода динамического программирования являются задачи о распределении ресурсов.

5.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В динамическом программировании рассматриваются многостадийные процессы принятия решения.

Многостадийные процессы – это такие процессы, в которых решения принимаются на каждой из последовательных стадий.

Динамическое программирование является средством оптимизации математически описанных процессов.

При постановке и решении задачи динамического программирования формулируется некоторый критерий, подлежащий удовлетворению, рассматриваемый процесс разбивается на стадии во времени или в пространстве и на каждой стадии принимаются решения, при которых достигается поставленная цель.

При рассмотрении вопросов динамического программирования принята следующая терминология:

а) стадия – единичный элемент, на которые делится весь процесс во времени или в пространстве; ступень – часть стадии. В любом случае стадия и ступень – это математические конструкции, применяемые для представления в дискретном виде непрерывной переменной;

б) состояние системы характеризуется совокупностью переменных, последние описывают состояние системы на любой стадии процесса;

в) переход от стадии к стадии и от состояния к состоянию описывается функциональными уравнениями;

г) стратегия определяется системой решений функционального уравнения; оптимальная стратегия выражается системой функций, максимизирующих правую часть уравнения.

Стадии процесса могут быть однородными и неоднородными. Процесс с однородными стадиями представляет собой последовательное изменение состояния объекта во времени, он состоит из последовательности однотипных стадий.

Процесс с неоднородными стадиями состоит из разнородных стадий. Состояние отдельной стадии характеризуется совокупностью величин, которые называются выходом или переменными состояния стадии. Если выход стадии является входом для следующей стадии, то для последней совокупность выходных переменных предыдущей стадии определяет состояние входа.

Кроме входных и выходных переменных на каждой стадии определяется группа управляющих переменных (управление), а также предполагается известным математическое описание каждой стадии. Рассматриваемый многостадийный процесс условно изображается схемой, изображенной на рис. 5.1.

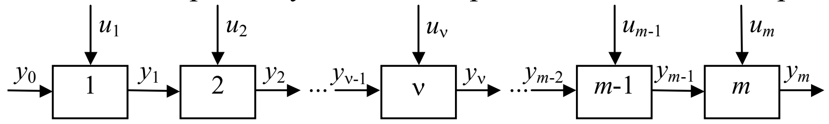


Рис. 5.1 Многостадийный процесс

Краеугольным камнем метода динамического программирования является принцип оптимальности: оптимальная стратегия обладает таким свойством, что, каково бы ни было начальное состояние и начальные решения, последующие решения должны приниматься, исходя из оптимальной стратегии с учетом состояния, вытекающего из первого решения.

Использование принципа оптимальности является гарантией того, что решение, принимаемое на каждой стадии, является наилучшим с точки зрения всего процесса в целом.

В динамическом программировании используется также принцип вложения, под которым понимается рассмотрение исходной задачи с позиций более широкого класса задач (например, рассматривать не 10, а *m* стадий). Это позволяет изучить целый класс задач, включая и исходную. Исходя из принципа вложения, представляется возможным изучить как структуру, так и "чувствительность" решения.

5.2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БЕЛЛМАНА

Как уже говорилось, математическое описание процесса известно.

Пусть состояние системы на каждой стадии описывается уравнением

$$y_\nu = f_\nu\left(y_{\nu-1},\, u_\nu\right), \tag{5.1}$$

где $y_{\nu-1}$, y_ν – переменные состояния $\nu - 1$ и ν стадий соответственно, u_ν – управление на ν-й стадии.

Уравнение (5.1) связывает выходные переменные ν стадии с выходными переменными предыдущей стадии $y_{\nu-1}$ и управлением u_ν, используемым на этой ν стадии.

На переменные состояния и управляющие воздействия могут быть наложены ограничения, выражающиеся в виде равенств или неравенств

$$F_j\left(y_1,\, ...,\, y_m,\, u_1,\, ...,\, u_m\right) \ge 0, \quad j = \overline{1,\, J}\,. \tag{5.2}$$

Кроме того, используется запись

$$y_\nu \in Y,\;\; u_\nu \in U \tag{5.3}$$

смысл которой заключается в том, что переменные принадлежат к допустимым областям, ограниченным соотношениями (5.2).

Эффективность каждой стадии процесса оценивается скалярной величиной Q_ν (y_ν, u_ν), которая называется функцией полезности – критерием оптимальности

$$Q_\nu = Q_\nu(y_\nu, u_\nu), \tag{5.4, a}$$

с учетом (5,1) функциональная зависимость (5.4, *а*) может быть представлена как

$$Q_\nu = Q_\nu(y_{\nu-1}, u_\nu). \tag{5.4, б}$$

Результирующая оценка эффективности многостадийного процесса в целом определяется как аддитивная функция результатов, получаемых на каждой стадии

$$Q = \sum_{\nu-1}^{m} Q_\nu\left(y_{\nu-1},\, u_\nu\right). \tag{5.5}$$

Естественно, что критерий оптимальности Q зависит от совокупности управляющих воздействий на всех стадиях процесса ($u_1, u_2, ..., u_m$).

Таким образом, задачу оптимизации многостадийного процесса можно сформулировать как задачу отыскания оптимальной стратегии $u_{\text{опт}} = (u_{1\text{опт}}, u_{2\text{опт}}, ..., u_{m\text{опт}})$, для которой критерий оптимальности Q принимает максимальное или минимальное значение.

Процедура применения принципа оптимальности для оптимизации m-стадийного процесса должна начинаться с последней стадии, для которой не существует последующих стадий, могущих повлиять на выбор управления $u_{m\ \text{опт}}$ на этой стадии. После этого приступают к определению оптимального управления для предыдущей m – 1 стадии, для которой оптимальная стратегия на последующих стадиях, т.е. на последней m-й известна и т.д. В результате может быть найдена оптимальная стратегия управления для всего многостадийного процесса, являющаяся функцией начального состояния процесса u_m (y_0).

При применении любой стратегии управления величина критерия оптимальности Q зависит только от состояния входа первой стадии y_0 $Q = Q(y_0)$.

Пусть оптимальное значение целевой функции (для определенности минимальное) на участке от ν до m будет $B_\nu^m(y_{\nu-1})$, и оно зависит от состояния на ν – 1 стадии

$$B_\nu^m\left(y_{\nu-1}\right) = \min_{u_\nu,\dots,u_m} \sum_{\iota=\nu}^{m} Q_\iota\left(y_{\iota-1},\, u_\iota\right). \tag{5.6}$$

Соответственно

$$B^m\left(y_0\right) = \min_{u_\iota \in U} Q\left(\underline{y^0}_{\iota=1,m}\right), \tag{5.7}$$

здесь оптимизация проводится по всем возможным управлениям, принадлежащим области допустимых значений U, на всех стадиях процесса. Соотношение (5.7) по существу является математической формулировкой задачи оптимизации m-стадийного процесса, но не содержит указаний как нужно минимизировать критерий Q, чтобы получить оптимальную стратегию $u_{\text{опт}} = (u_{1\text{опт}}, u_{2\text{опт}}, ..., u_{m\ \text{опт}})$.

Так как Q является аддитивной функцией критериев оптимальности отдельных стадий, то его можно представить в виде

$$Q\left(y_0\right) = Q_1\left(y_0,\, u_1\right) + Q_{m-1}\left(y_1\right), \tag{5.8}$$

тогда (5.7) перепишется в виде

$$B^m\left(y_0\right) = \min_{\substack{u_\iota \in U \\ \iota=\overline{1,m}}} \left[Q_1\left(y_0,\, u_1\right) + Q_{m-1}\left(y_1\right)\right]. \tag{5.9}$$

Выражение (5.9) может быть также переписано в виде

$$B^m(y_0) = \min_{u_1 \in U}\left[Q_1(y_0, u_1) + \min_{\substack{u_\iota \in U \\ \iota = \overline{2,m}}} Q_{m-1}(y_1) \right], \qquad (5.10)$$

где минимизация первого слагаемого Q_1 (y_0, u_1) проводится только по управлению u_1, а второе минимизируется выбором управлений на всех стадиях, причем каждое слагаемое в (5.10) нельзя минимизировать в отдельности, так как они оба зависят от u_1.

Минимизацию второго слагаемого в (5.10) можно рассматривать как задачу оптимизации (m – 1) стадийного процесса с критерием оптимальности $Q_{m-1}(y_1)$ и оптимальной стратегией $u_{m-1_{\text{опт}}} = (u_{2\text{опт}}, u_{3\text{опт}}, ..., u_{m\text{опт}})$. Таким образом, можно записать, что

$$B_{m-1}(y_1) = \min_{\substack{u_\iota \in U \\ \iota = \overline{2,m}}} Q_{\underline{m-1}}(y_1). \qquad (5.11)$$

Выражение (5.9) с учетом (5.11) может быть представлено в виде

$$B_m(y_0) = \min_{u_1 \in U}\left[Q_1(y_0, u_1) + B_{m-1}(y_1) \right]. \qquad (5.12)$$

Если математическое описание первой стадии $y_1 = f_1(y_0, u_1)$, то

$$B_m(y_0) = \min_{u_1 \in U}\left[Q_1(y_0, u_1) + B_{m-1}[\, f(y_0, u_1)] \right]. \qquad (5.13)$$

Последнее уравнение является математической формулировкой принципа оптимальности и называется рекуррентным соотношением Беллмана.

Для начала расчетов необходимо задать начальную функцию f_0 (y_m), которая может быть принята равной нулю, что естественным образом соответствует отсутствию процесса за пределами последней стадии.

Уравнение (5.13) можно трактовать как оптимальные потери, причем $Q_1(y_0, u_1)$ – потери на первом участке, а B_{m-1} – оптимальные потери на всех последующих участках. Минимизируя сумму этих потерь, необходимо найти правильное соотношение между ними.

5.3 ОБЩАЯ ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Согласно общему подходу к решению задач методом динамического программирования определение оптимальных управлений начинается с последней стадии процесса, для которой рекуррентное соотношение Беллмана с учетом, что B_0 (y_m) = 0, записывается в виде

$$B_1(y_{m-1}) = \min_{u_m \in U} Q_m(y_{m-1}, u_m). \qquad (5.14)$$

Для этой стадии можно построить зависимость целевой функции Q_m от управления u_m для различных значений переменной состояния y_{m-1} (рис. 5.2).

Эта зависимость позволяет найти зависимость оптимального управления на последней стадии $u_{m_{\text{опт}}}$ от входной переменной этой стадии y_{m-1} (рис. 5.3).

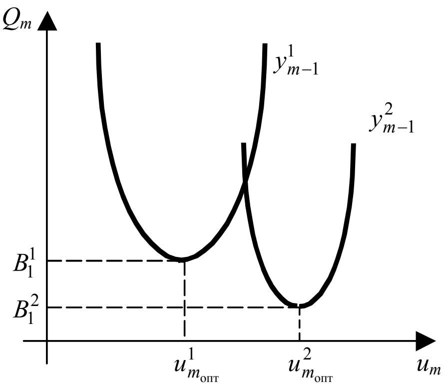


Рис. 5.2 Зависимость Q_m от u_m

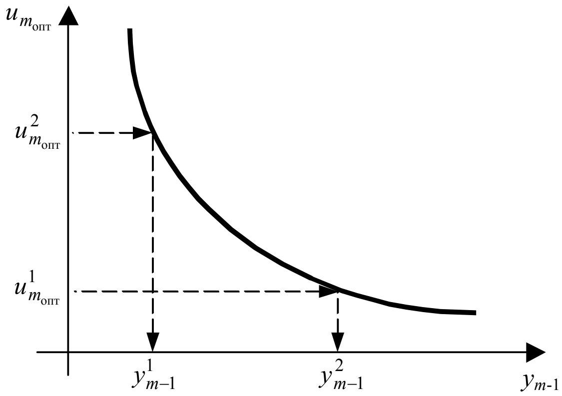


Рис. 5.3 Зависимость оптимального управления u_m от входной переменной $y_{m\text{-}1}$

Одновременно определяется минимальное значение целевой функции B_1 данной стадии от ее входа, т.е. y_{m-1} (рис. 5.4).

Таким образом можно получить зависимости оптимального управления на m-й стадии от входной переменной этой стадии $u_{m\text{опт}} = u_m(y_{m-1})$, а также критерия оптимальности на этой m-й стадии от ее входа $B_1 = B_1(y_{m-1})$. Кроме того, можно определить зависимость выходной переменной при оптимальном управлении от входной переменной $y_{m_{\text{опт}}} = y_m(y_{m-1})$ (рис. 5.5).

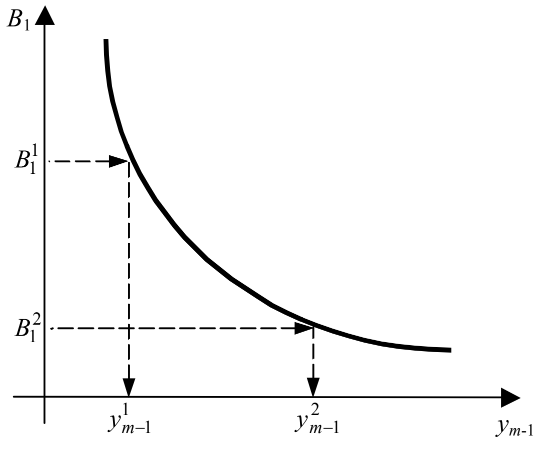


Рис. 5.4 Зависимость B_1 от y_{m-1}

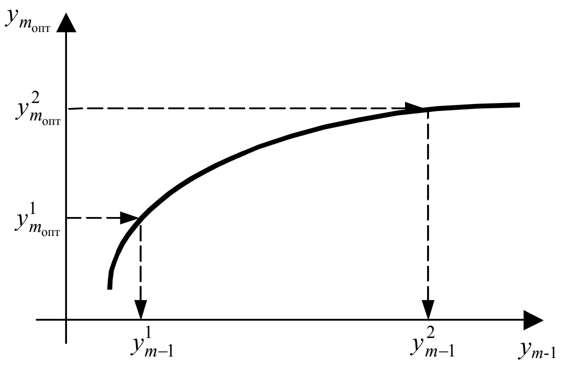


Рис. 5.5 Зависимость $y_{m_{\text{опт}}}$ от y_{m-1}

Для определения оптимального управления u_{m-1} на $(m-1)$-й стадии из всех полученных результатов необходима зависимость $B_1(y_{m-1})$, с учетом которой рекуррентное соотношение для $(m-1)$-й стадии записывается как

$$B_2(y_{m-2}) = \min_{u_{m-1} \in U} \{Q_{m-1}(y_{m-2}, u_{m-1}) + B_1[f_{m-1}(y_{m-2}, u_{m-1})]\}. \quad (5.15)$$

Далее необходимо построить зависимость $(Q_{m-1} + B_1)$ от управления u_{m-1} для различных значений y_{m-2} переменных состояний входа $(m-1)$ стадии (рис. 5.6).

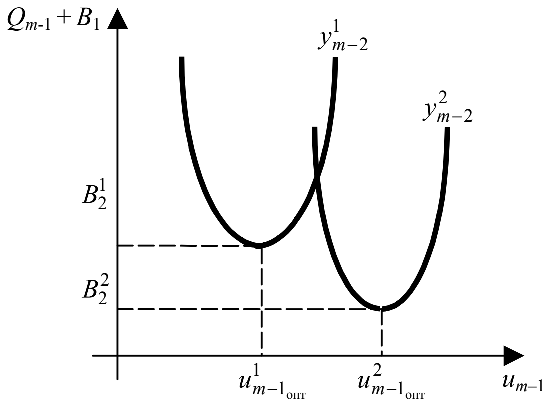


Рис. 5.6 Зависимость $(Q_{m-1} + B_1)$ от u_{m-1}

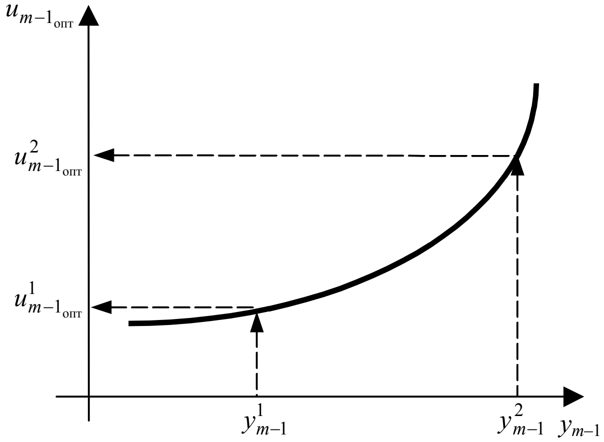


Рис. 5.7 Зависимость оптимального управления от входа y_{m-2} на $(m-1)$ стадии

Также как и для m-й стадии в результате минимального значения выражения (5.15) находятся зависимости $u_{m-1\text{опт}} = u_{m-1}(y_{m-2})$, $B_2 = B_2(y_{m-2})$, а также $y_{m-1\text{опт}} = y_{m-1}(y_{m-2})$, которые представлены соответственно на рис. 5.7, 5.8, 5.9.

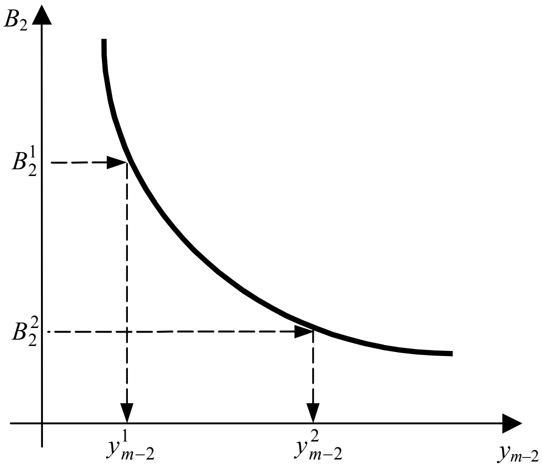


Рис. 5.8 Зависимость B_2 от y_{m-2}

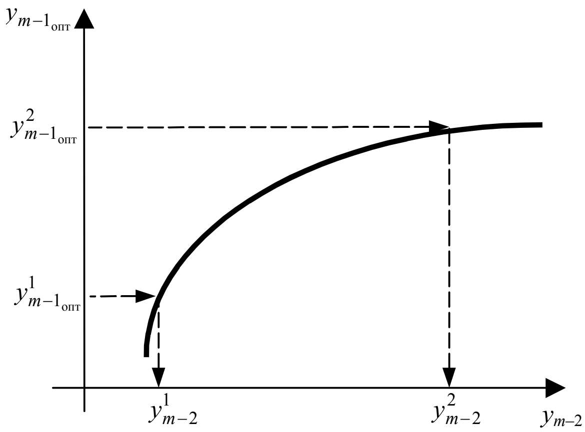


Рис. 5.9 Зависимость $y_{m-1_{\text{опт}}}$ от y_{m-2}

Далее появляется возможность записать рекуррентные соотношения на (m – 2) стадии, и т.д. Продолжая процесс вычислений можно дойти до первой стадии, для которой также будут получены соотношения $u_{1_{\text{опт}}} = u_1(y_0)$, $B_m = B_m(y_0)$, $y_{1_{\text{опт}}} = y_1(y_0)$. Возможный вид кривых для них представлен на рис. 5.10 – 5.13.

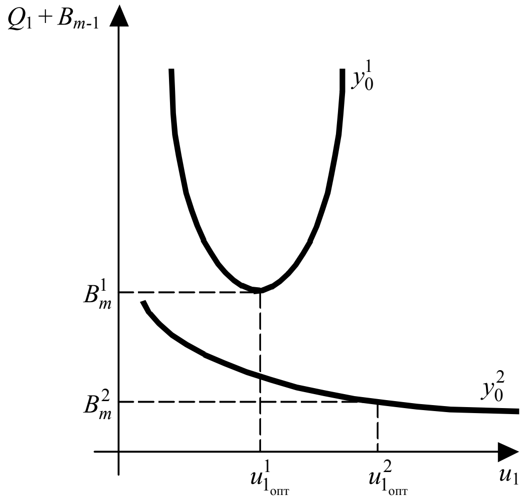


Рис. 5.10 Зависимость ($Q_1 + B_{m\text{-}1}$) от u_1

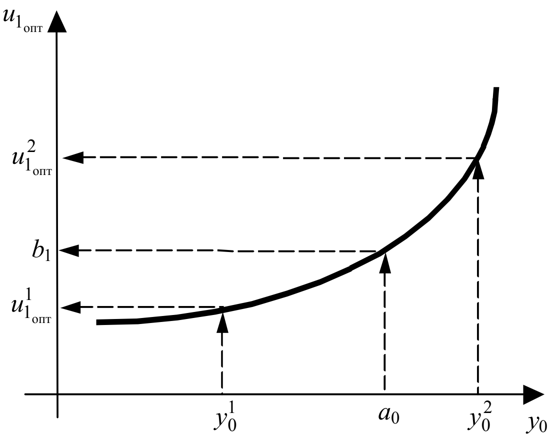


Рис. 5.11 Зависимость оптимального управления $u_{1опт}$ от входа на 1-й стадии

На этом первый этап решения задачи оптимизации многостадийного процесса заканчивается. Полученные соотношения определяют оптимальную стратегию управления m-стадийного процесса для любого возможного состояния входа первой стадии.

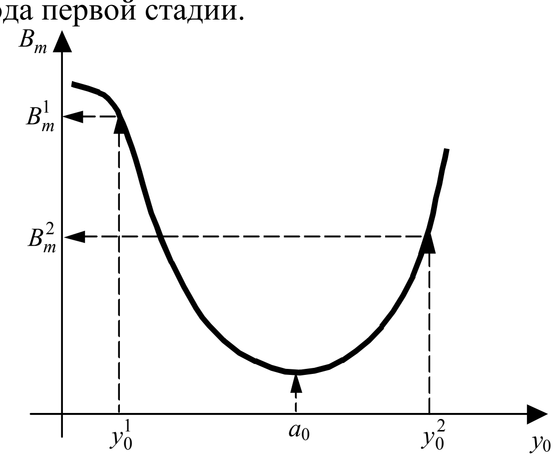


Рис. 5.12 Зависимость B_m от y_0

На втором этапе решения оптимальной задачи находятся оптимальные управления всех стадий u_ν, $\nu = \overline{1, m}$, для чего необходимо принять соответствующее значение состояния входа y_0. В том случае, если оно в постановке задачи не задано, его можно определить из условия минимума величины B_m как функции значения y_0 (рис. 5.12). В рассмотренном случае зависимость B_m от y_0 имеет минимум, что позволяет найти оптимальное значение состояния входа $y_0 = a_0$. Минимальное значение B_m может достигаться и на концах.

После определения переменной состояния входа из условия минимума функции $B_m(y_0)$, преступают к определению оптимальных управлений для всех стадий процесса, соответствующих выбранной величине $y_0 = a_0$ (рис. 5.12). Вторым этапом решения задачи оптимального управления методом динамического программирования является определение оптимальных управлений для всех стадий. Здесь порядок расчета следующий.

Определяется оптимальное управление на первой стадии (рис. 5.11) $u_{1опт} = b_1$ и значение выходной переменной этой стадии $y_{1опт} = a_1$ (рис. 5.13), отвечающее оптимальному управлению. После этого переходят ко второй стадии, и вся процедура повторяется и т.д. В результате решения задачи доходят до последней m-й стадии и имеют значения $u_{V опт}$ для всей рассматриваемой задачи по стадиям.

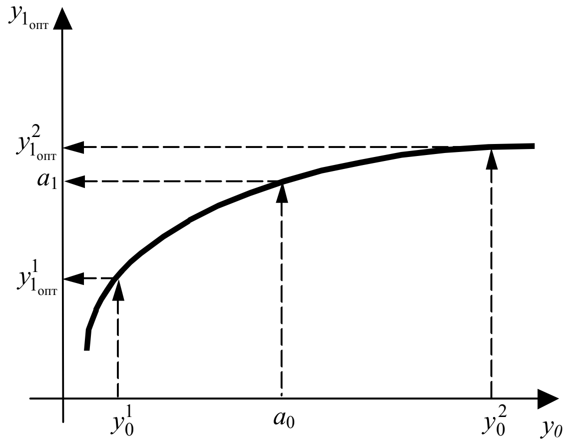


Рис. 5.13 Зависимость $y_{1опт}$ от y_0

Динамическое программирование является одним из методов решения задач оптимизации при принятии решений. Основные преимущества этого метода: прежде всего, он позволяет найти глобальное оптимальное решение; оптимизация ведется по одной переменной; рекуррентная формула (уравнение) Беллмана удобна для программирования. Ограничением метода является размерность задачи, так как приходится хранить результаты оптимизации всех этапов. Но гораздо более серьезные затруднения возникают при применении метода динамического программирования для оптимизации многостадийных процессов, для которых размерности векторов состояния y_ν и управления u_0 велики, из-за сложности отыскания оптимальных управлений на каждой стадии. Поэтому следует стремиться, чтобы размерность стадии оптимизируемого объекта была по возможности невысокой.

5.4 ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

5.4.1 Задача распределения ресурсов

Пусть имеется некоторое количество экономических ресурсов. Под термином ресурсы подразумеваются люди, деньги, машины, материалы для технологических процессов, вода для сельскохозяйственных и промышленных целей, топливо и т.д. Эти ресурсы потребляются различными способами, в результате чего получают некоторой доход, размер которого зависит от употребленного количества ресурсов и от выбранного процесса распределения.

Задача заключается в распределении ресурсов таким образом, чтобы максимизировать общий доход при следующих условиях: доходы, полученные от различных процессов измеряются общей единицей; доход, полученный от рассматриваемого процесса, не зависит от количества ресурсов, выделенных для других процессов; общий доход получается как сумма доходов полученных от отдельных процессов.

Математическая формулировка задачи следующая.

Пусть имеется N различных процессов ($\iota = 1, 2, ..., N$), каждому из которых соответствует функция полезности – целевая функция (доход) $Q\iota$, зависящая от количества выделенных ресурсов u_ι. Общий доход определяется аддитивной функцией $Q(u_1, ..., u_N) = \sum_{\iota=1}^{N} Q_\iota(u_\iota)$, на количество ресурсов наложены ограничения, что общее их количество не должно превышать заданного $u_1 + u_2 + ... + u_N = u,$ где $u_\iota \geq 0$.

Требуется максимизировать целевую функцию Q (u_1, ..., u_N) при u_ι, удовлетворяющих соответствующим ограничениям.

Конкретным примером рассматриваемой задачи является процесс загрузки судна. Необходимо загрузить корабль грузом, составленным из отдельных предметов различного типа, имеющих различные массу и стоимость. Задача состоит в загрузке судна ограниченной грузоподъемности грузом наибольшей стоимости.

Если u_ι – число отдельных предметов ι-го типа, V_ι – вес отдельного предмета ι-го типа), C_ι – стоимость отдельного предмета ι-го типа, z – максимальная грузоподъемность судна, N – количество различных типов, тогда ценность груза определяется линейной формой $Q(u)=\sum_{\iota=1}^{N} u_\iota C_\iota$ и ограничение по грузоподъемности имеет вид $\sum_{\iota=1}^{N} u_\iota U_\iota \le z.$

Требуется максимизировать целевую функцию $Q(u)$ при ограничении на грузоподъемность и условиях $C_\iota \ge 0$, $V_\iota \ge 0$, $u_\iota = 0, 1, 2, ...$

Другим примером, в котором функция цели не является аддитивной, является задача надежности, возникающая при конструировании любого узла сложной аппаратуры. Требуется построить надежное устройство из менее надежных компонент.

5.4.2 Транспортная задача

В математической экономике большое значение имеет задача наиболее эффективного перемещения ресурсов из одного пункта в другой. Это, так называемая, транспортная задача.

Пусть ресурсы сосредоточены на складах $\iota = 1, 2, ..., m$ (D_ι), спрос на них имеется в пунктах потребления $j = 1, 2, ..., N$ (P_j). Для простоты рассматривается один вид ресурса, его запасы на ι-м складе – u_ι, спрос на него в j-м пункте потребления – r_j. Общий запас равен общему спросу $\sum_{\iota=1}^{m} u_\iota = \sum_{j=1}^{N} r_j$.

Количество ресурсов, отправляемые из ι-го склада в j-й пункт потребления $u_{\iota j}$, стоимость соответствующей перевозки $Q_{\iota j}(u_{\iota j})$. Величины $u_{\iota j}$ должны быть неотрицательны, $u_{\iota j} \ge 0.$ Кроме того, вводятся ограничения на запасы; общее количество ресурсов, отправляемое из любого склада, должно равняться запасам на этом складе $\sum_{j=1}^{N} u_{\iota j} = u_\iota$, $\iota = \overline{1, m}$; и ограничение на спрос; общее количество ресурсов, отправляемое в любой пункт потребления, должно равняться спросу в этом пункте $\sum_{\iota=1}^{m} u_{\iota j} = r_j$, $j = \overline{1, N}.$

Таким образом, требуется определить количество перевозимых ресурсов из ι-го склада в j-й пункт потребления $u_{\iota j}$, чтобы общая стоимость перевозок $Q_{mN} = \sum_{\iota, j} Q_{\iota j}(u_{\iota j})$ была минимальна.

Эта задача обычно решается методом линейного программирования. Но, если функции стоимости $Q_{\iota j}(u)$ нелинейные, то эти методы не применимы, и задача может быть решена методом динамического программирования.

Пусть для простоты имеется два склада $\iota = 1, 2$, и N пунктов потребления. Величина затрат при использовании оптимальной политики составляет $B_N(u_1, u_2)$ при $N = 1, 2, ..., u_1 \ge 0, u_2 \ge 0$.

Удовлетворяя первым спрос в N-м пункте потребления, затраты в нем составят $Q_{1N}(u_{1N}) + Q_{2N}(u_{2N})$ и запасы ресурсов на складах уменьшатся до $u_1 - u_{1N}$ и $u_2 - u_{2N}$. Согласно принципа оптимальности для $N \ge 2$ рекуррентное соотношение Беллмана записывается в виде

$$B_N(u_1, u_2) = \min_{u \in U} \{ Q_{1N}(u_{1N}) + Q_{2N}(u_{2N}) + B_{N-1}(u_1 - u_{1N}, u_2 - u_{2N}) \},$$

где U – область, определенная условиями $u_{1N} + u_{2N} = r_N$, $0 \le u_{1N} \le u_1$, $0 \le u_{2N} \le u_2$.

Для $N = 1$ будет $B_1(u_1, u_2) = Q_{11}(u_1) + Q_{21}(u_2)$.

5.4.3 Процессы сглаживания

Имеется ряд процессов, для которых целесообразно придерживаться некоторого среднего способа поведения, сочетая затраты разных типов таким образом, чтобы максимизировать полезность операции (целевую функцию), Такие процессы называются процессами сглаживания, их примером, часто встречающимся при анализе экономических, промышленных и военных операций, является следующая задача.

На станцию согласно графику поступают требования на определенные поставки или виды обслуживания. Если станция не справляется с этими требованиями, то она терпит убытки, а если этих требований меньше, чем она может обслужить, то она также терпит убытки, но другого рода из-за переукомплектования обслуживающим персоналом, или требований, которых достаточно, но станция не может их обслужить из-за перегрузки складов.

Естественно, что на изменение уровня запасов или обслуживание понадобятся затраты. Если известны размеры требований, которые сильно меняются во времени, и заданы затраты на пополнение запасов и размеры убытков, то задача определения способа регулирования уровня запасов, минимизирующего полные издержки всего процесса становится уже нетривиальной.

Данная задача решается методом динамического программирования, для этого формулируется ее математическая постановка.

Если u_ι – производительность системы на ι-м шаге, $\iota = 1, 2, ..., N$; r_ι – заданная последовательность спросов, причем $u_\iota \geq r_\iota$ (спрос всегда удовлетворяется), $u_0 = q$ – фиксированный начальный уровень запасов; $Q_\iota(u_\iota - r_\iota)$ – убытки, вызванные тем, что $u_\iota > r_\iota$, $\varphi_\iota(u_\iota - u_{\iota-1})$ – убытки, вызванные тем, что $u_\iota \neq u_{\iota-1}$, то суммарные издержки выражаются формулой $Q(u_1, ..., u_N) = \sum_{\iota=1}^{N}[Q_\iota(u_\iota - r_\iota) + \varphi_\iota(u_\iota - u_{\iota-1})]$.

Требуется определить уровни u_ι, $\iota = 1,2, ..., N$, при $u_\iota \geq r_\iota$ таким образом, чтобы минимизировалась целевая функция (издержки) $Q(u_1, ..., u_N)$. Рекуррентное соотношение имеет вид

$$B_\nu(u) = \min_{u_\nu \geq r_\nu}[Q_\nu(u_\nu - r_\nu) + \varphi_\nu(u_\nu - q) + B_{\nu+1}(u_\nu)].$$

5.4.4 Замена оборудования

Одной из основных проблем промышленности является замена старого парка машин новым. Необходимо определить оптимальную политику модернизации и замены оборудования при различных предположениях относительно текущих издержек, производственных характеристик и будущего развития техники. Решения здесь принимаются почти ежегодно в зависимости от характерного для данного процесса периода времени, т.е. имеется многошаговый процесс решения.

Пусть для простоты рассуждений имеется только одна машина, которая ежегодно приносит некоторый доход, но она требует ухода и может быть в любой момент продана или заменена новой. Доход, затраты на содержание, стоимость замены зависят от срока ее службы.

Решения принимаются в моменты времени $t = 0, 1, 2, ...$ Возможны два решения: сохранить машину (K) или купить новую (P). Введем следующие обозначения: $r(t)$ – годовой доход от машины возраста t, $u(t)$ – годовые расходы на содержание машины возраста t, $C(t)$ – стоимость замены машины возраста t. Если единица дохода на некотором шаге равносильна α единицам дохода следующего шага, то суммарный доход $B(t)$ при оптимальной политике за рассматриваемый период составит

$$B(t) = \max\begin{bmatrix} P : r(0) - u(0) - C(t) - \alpha B(1) \\ K : r(t) - u(t) + \alpha \cdot B(t+1) \end{bmatrix}.$$

Этот пример является примером бесконечного процесса.

Оптимальная политика состоит в том, что машина должна проработать T лет, а затем быть заменена новой. Система функциольных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} B(0) &= n(0) + \alpha B(1), \\ B(1) &= n(1) + \alpha B(2), \\ &\dots \\ B(T-1) &= n(T-1) + \alpha B(T), \\ B(T) &= -C(T) + n(0) + \alpha B(1). \end{aligned}$$

Неизвестное значение T выбирается из условия максимума $B(1)$.

5.4.5 Задача складирования

Имеется склад фиксированной вместимости с некоторым начальным запасом товара, стоимость которого подвержена изменению. Какова должна быть оптимальная политика покупки, хранения и передачи этого товара?

Метод динамического программирования дает вычислительный алгоритм, но он также позволяет найти точное аналитическое решение задачи складирования.

Пусть p_ι – затраты на единицу товара, C_ι – продажная цена единицы товара, x_ι – количество купленного товара, y_ι – количество проданного товара, v – величина наличного запаса на каждом шаге, V – вместимость хранилищ склада.

На любую возможную политику накладываются ограничения:

– на покупку $v+\sum_{j=1}^{\iota}\left(x_j-y_j\right)\le B,\ \iota=1,\ \overline{N};$

– на продажу $y_\iota \le v+\sum_{j=1}^{\iota-1}\left(x_j-y_j\right),\ \iota=2,\ \overline{N}\ ;$

– неотрицательность $x_\iota \ge 0,\quad y_\iota \ge 0.$

Целевая функция представляет собой суммарную прибыль, полученную при N-шаговом процессе $Q_N=\sum_{j=1}^{N}\left(C_j\, y_j-p_j\, x_j\right).$

Рекуррентное соотношение Беллмана

$$B_N(U)=\max_{x_N,\,y_N}\left[\,C_N y_N-p_N x_N+B_{N-1}\left(v+x_N-y_N\right)\right]$$

при условиях: $0\le y_N\le v,\quad x_N\ge 0,\quad v+x_N-y_N\le V.$

5.4.6 Пример решения задачи методом динамического программирования

В определенный момент времени на предприятии установлено новое оборудование. Зависимость производительности этого оборудования от времени его использования предприятием, а также зависимость затрат на содержание и ремонт оборудования при различном времени его использования приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Исходные данные	Время r, в течении которого используется оборудование (лет)					
	0	1	2	3	4	5
Годовой выпуск продукции R (r) в стоимостном выраже-	80	75	65	60	60	55

нии, тыс. р.						
Ежегодные затраты z (r), связанные с содержанием и ремонтом оборудования, тыс. р.	20	25	30	35	45	55

Зная, что затраты связаны с приобретением и установкой нового оборудования идентичного с установленным, составляют 40 тыс. р., а заменяемое оборудование списывается, составить такой план замены оборудования в течение 5 лет, при котором общая прибыль за данный период времени максимальна.

Эту задачу можно рассматривать как задачу динамического программирования, в которой в качестве системы выступает оборудование. Состояние этой системы определяется фактическим временем использования оборудования (его возраста) r, т.е. описывается единственным параметром r.

В качестве управлений выступают решения о замене и сохранении оборудования, принимаемые в начале каждого года. Пусть u_1 – решение о сохранении оборудования, u_2 – решение о замене оборудования. Тогда задача состоит в нахождении такой стратегии управления, определяемой решениями, принимаемыми к началу каждого года, при которой общая прибыль предприятия за пятилетку является максимальной.

Сформулированная задача обладает свойством аддитивности и отсутствия последствия, ее решение может быть найдено с помощью алгоритма решения задач динамического программирования, реализуемого в два этапа. На первом этапе при движении от начала 5-го года к началу 1-го года для каждого допустимого состояния оборудования находится условное оптимальное управление, а на втором этапе при движении от начала 1-го года к началу 5-го года из условных оптимальных решений составляется для каждого года оптимальный план замены оборудования.

Для определения условных оптимальных решений необходимо составить функциональное уравнение Беллмана.

В предположении того, что к началу k-го года $\left(k=\overline{1,5}\right)$ может быть принято только одно из двух решений – заменять или не заменять оборудование, то прибыль предприятия за k-й год составит

$$Q_k\left(r^k,\, u_k\right)=\begin{cases} R\left(r^k\right)-z\left(r^k\right) \text{ при } u_1; \\ R\left(r^k=0\right)-z\left(r^k=0\right)-C_n \text{ при } u_2, \end{cases}$$

где r^k – возраст оборудования к началу k-го года $\left(k=\overline{1,5}\right)$; u_n – управление, реализуемое к началу k-го года, C_n – стоимость нового оборудования.

Таким образом, в данном случае уравнение Беллмана имеет вид

$$Q_k\left(r^k\right)=\max_r\begin{cases} R\left(r^k\right)-z\left(r^k\right)+Q_{k+1}\left(r^{k+1}\right), \\ R\left(r^k=0\right)-z\left(r^k=0\right)-C_n-Q_{k+1}\left(r^k=1\right). \end{cases}$$

Используя последнее уравнение можно приступить к нахождению решения исходной задачи. Это решение необходимо начать с определения условно оптимального решения (управления) для последнего 5-го года, в связи с чем находится множество допустимых состояний оборудования к началу данного года. Так как в начальный момент имеется новое оборудование ($r^1 = 0$), то возраст оборудования к началу 5-го года может составлять 1, 2, 3, 4 года. Поэтому допустимые состояния системы на данный период времени таковы: $r_1^5=1,\ r_2^5=2,\ r_3^5=3,\ r_4^5=4.$ Для каждого из этих состояний находится условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $Q_5(r^5)$. В результате рассмотрения последнего года расчетного периода соотношение $Q_6\left(r^{k+1}\right)=0$ и следовательно

$$Q_5\left(r^5\right)=\max\begin{cases} R\left(r^5\right)-z\left(r^5\right); \\ R\left(r^5=0\right)-z\left(r^5=0\right)-C_n. \end{cases}$$

Учитывая данные табл. 5.1 и $r_1^5 = 1$, находят

$$Q_5\left(r_1^5\right) = \max\begin{Bmatrix} R\left(r_1^5\right) - z\left(r_1^5 = 1\right) \\ R\left(r^5 = 0\right) - z\left(r^5 = 0\right) - C_n \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 75–25 \\ 80–20–40 \end{Bmatrix} = 50;$$

откуда следует, что условно оптимальное решение $u^0 = u_1$, т.е. должно быть принято решение о сохранении оборудования.

Аналогичные вычисления проводятся и для других допустимых состояний оборудования к началу 5-го года:

$$Q_5\left(r_2^5\right) = \max\begin{Bmatrix} 65 - 30 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 35,\ u^0 = u_1;$$

$$Q_5\left(r_3^5\right) = \max\begin{Bmatrix} 60 - 35 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 25,\ u^0 = u_1;$$

$$Q_5\left(r_4^5\right) = \max\begin{Bmatrix} 60 - 45 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 20,\ u^0 = u_2.$$

Полученные результаты вычислений сведены в табл. 5.2.

Теперь рассматриваются возможные состояния оборудования к началу 4-го года. Здесь допустимыми состояниями являются $r_1^4 = 1,\ r_2^4 = 2,\ r_3^4 = 3.$ Для каждого из них определяются условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $Q_4\,(r^4)$. Для этого используется функциональное уравнение Беллмана и данные табл. 5.1 и 5.2:

$$Q_4\left(r_1^4\right) = \max\begin{Bmatrix} R\left(r_1^4 = 1\right) - z\left(z_1^4 = 1\right) + Q_5\left(r_2^5 = 2\right) \\ R\left(r^4 = 0\right) - z\left(z^4 = 0\right) - C_n + Q_5\left(r_1^5 = 1\right) \end{Bmatrix} =$$
$$= \max\begin{Bmatrix} 75–25+35 \\ 80–20–40+50 \end{Bmatrix} = 85;\ \ u^0 = u_1;$$

$$Q_4\left(r_2^4\right) = \max\begin{Bmatrix} 65–30+25 \\ 80–20–40+50 \end{Bmatrix} = 70,\ u^0 = u_2;$$

$$Q_4\left(r_3^4\right) = \max\begin{Bmatrix} 60–35+20 \\ 80–20–40+50 \end{Bmatrix} = 70,\ u^0 = u_2.$$

5.2 Условно оптимальные решения для 5-го года

Возраст оборудования r^5 лет	Значение функции $Q_5(r^5)$, тыс. р.	Условно оптимальное решение u
1	50	u_1
2	35	u_1
3	25	u_1
4	20	u_2

5.3 Условно оптимальные решения для 4-го года

Возраст оборудования, r^4 лет	Значения функции $Q_4(r^4)$, тыс. р.	Условно оптимальное решение
1	85	u_1
2	70	u_2

3	70	u_2

Полученные результаты сведены в табл. 5.3.

К началу 3-го года условно оптимальное решение для каждого из допустимых состояний оборудования с учетом, что $r_1^3 = 1,\ r_2^3 = 2$ и данных табл. 5.1 и 5.3 будет

$$Q_3\left(r_1^3\right) = \max\begin{Bmatrix} R\left(r_1^3 = 1\right) - z\left(r_1^3 = 1\right) + Q_4\left(r^4 = 2\right) \\ R\left(r^3 = 0\right) - z\left(r^3 = 0\right) - C_n + Q_4\left(r^4 = 1\right) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 75 – 25 + 70 \\ 80 – 20 – 40 + 85 \end{Bmatrix} = 120;$$

$$u^0 = u_1;\ \ Q_3\left(r_2^3\right) = \max\begin{Bmatrix} 65 - 30 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{Bmatrix} = 105;\ \ u^0 = u_2\,.$$

Из последнего выражения видно, что если к началу 3-го года возраст оборудования составляет 2 года, то независимо от того, будет ли принято решение u_1 или u_2 величина прибыли окажется одной и той же, т.е. в качестве условно оптимального управления может быть принято любое, например u_2. Полученные значения для $Q_3\ (r^3)$ и соответствующее условно оптимальные решения сводятся в табл. 5.4.

5.4 Условно оптимальные решения для 3-го года

Возраст оборудования, r^3 лет	Значения функции $Q_3(r^3)$, тыс. р.	Условно оптимальное решение
1	120	u_1
2	105	u_2

И наконец, рассматриваются допустимые состояния оборудования к началу 2-го года. Вполне очевидно, что на данный момент времени возраст оборудования может быть равен только лишь одному году. Поэтому здесь предстоит сравнить лишь два возможных решения – сохранить оборудование или произвести замену:

$$Q_2\left(r_1^2\right) = \max\begin{Bmatrix} R\left(r_1^2 = 1\right) - z\left(r_1^2 = 1\right) + Q_3\left(r^3 = 1\right) \\ R\left(r^2 = 0\right) - z\left(r^2 = 0\right) - C_n + Q_3\left(r^3 = 1\right) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 75 – 25 + 105 \\ 80 – 20 – 40 + 120 \end{Bmatrix} = 155,\ \ u^0 = u_1.$$

Полученный результат сведен в табл. 5.5.

Согласно условию, в начальный момент установлено новое оборудование $\left(r_1^1 = 0\right)$. Поэтому проблемы выбора между сохранением и заменой оборудования не существует. Следовательно, условно оптимальным решением является u_1, а значение функции

$$Q_1\left(r_1^1\right)=R\left(r_1^1=0\right)-z\left(r_1^1=0\right)+Q_2\left(r^1=1\right)=80-20+155=215.$$

Таким образом, максимальная прибыль предприятия может быть равна 215 тыс. р. Она соответствует оптимальному плану замены оборудования, который получается на основе данных табл. 5.5, 5.4, 5.3 и 5.2, т.е. в результате реализации второго этапа вычислительного процесса, состоящего в прохождении всех рассмотренных шагов с начала 1-го до начала 5-го года.

5.5 Условно оптимальные решения для 2-го года

Возраст оборудования, r^2 лет	Значения функции $Q_2(r^2)$, тыс. р.	Условно оптимальное решение u^0
1	155	u_1

5.6 Оптимальный план замены оборудования

	Годы пятилетки				
	1	2	3	4	5
Оптимальное решение	Сохранить оборудование	Сохранить оборудование	Заменить оборудование	Сохранить оборудование	Сохранить оборудование

Для 1-го года решение единственно – сохранить оборудование. Значит, возраст оборудования к началу 2-го года равен одному году. Тогда в соответствии с данными табл. 5.5 оптимальным решением для 2-го года является решение о сохранении оборудования. Реализация такого решения приводит к тому, что возраст оборудования к началу 3-го года становится равным двум годам. При таком возрасте (табл. 5.4) оборудование в 3-ем году следует заменить. После замены оборудования его возраст к началу 4-го года составит 1 год. По данным табл. 5.3 при таком возрасте оборудование менять не следует. Поэтому возраст оборудования к началу 5-го года составит 2 года, т.е. менять оборудование нецелесообразно (табл. 5.2).

В результате получен следующий оптимальный план замены оборудования (табл. 5.6).

6 ИГРОВЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Одним из возможных типов задач при принятии решения являются, так называемые, состязательные задачи, в которых решение принимает не одно лицо, а два или большее число лиц. Например, одно лицо покупает сахар и хочет получить максимальную прибыль, но оно понимает, что его прибыль зависит не только от того, сколько сахара будет куплено, но и от того, сколько сахара купит его конкурент. При этом либо оба лица стремятся "выиграть" (максимизировать свои целевые функции), либо одно лицо не стремится этого сделать (игры с природой).

Решению подобных состязательных задач посвящена теория игр [5]. Стороны или лица, принимающие решения в состязательных задачах, называются игроками.

Задача относится к теории игр, если:

а) результат решения задачи зависит от решения двух или более лиц, которые принимают эти решения независимо;

б) решения игроками принимаются в условиях неопределенности.

6.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется два лица (первое и второе) и оба эти лица стремятся получить максимальную выгоду. Следовательно, имеется две целевые функции: $Q_1(x, y)$ – функция выигрыша первого лица, $Q_2(x, y)$ – функция выигрыша второго лица, где x, y – решения, принимаемые соответственно первым и вторым лицом.

Таким образом, значение целевой функции первого игрока зависит не только от его решения x, которое он примет, но и от решения y, которое примет второй игрок. То же можно сказать и о целевой функции $Q_2(x, y)$ второго лица.

Если бы решение у второго игрока было бы точно известно, то для первого игрока выбор оптимального решения x^* был бы традиционным

$$x^* = \arg\max_{x \in X} Q_1(x, \hat{y}),$$

где $\hat{y}$ – известное решение второго лица, X – множество возможных решений первого лица.

Совсем иначе обстоит дело, если решение у второго лица неизвестно. В этом случае необходимо условиться, каким образом оценивать "удачность" выбора решения x, так как значение целевой функции $Q_1(x, y)$ зависит не только от x, но и от y, что иллюстрируется графиком (рис. 6.1).

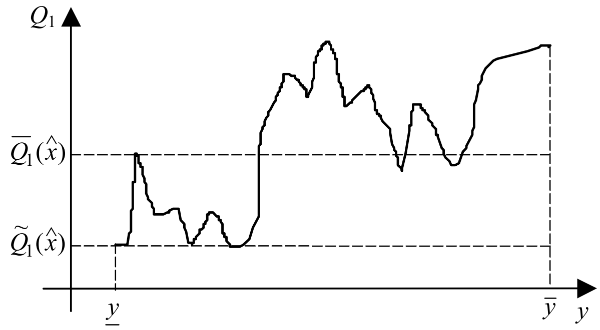


Рис. 6.1 Зависимость целевой функции первого игрока от решения второго игрока

Здесь следует ввести новую оценочную функцию $\hat{Q}_1(x)$, которая позволила бы сравнивать какое из решений x_1 или x_2 первого лица "лучше".

Также можно оценивать "хорошесть" решения x по среднему значению целевой функции Q_1

$$\overline{Q_1}(x) = \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} Q_1(x, y) P(y) dy.$$

Эта оценка является хорошей, она учитывает вклад каждого решения второго лица и вероятность принятия таких решений. Однако, в этом случае необходимо знать вероятность принятия решения вторым лицом или плотность распределения вероятности, если множество X является континиум. То же самое относится, очевидно, и к функции $\overline{Q_2}(y)$. Если $P(y)$ не известно, то вычислить $\overline{Q_1}(y)$ или $\overline{Q_2}(y)$ невозможно, следует выбрать новую оценку "хорошего " решения.

Естественной оценкой в этом случае является "наихудшее" (минимальное) значение целевой функции $\tilde{Q}_1(x)$

$$\tilde{Q}_1(x) = \min_{y \in Y} Q_1(x, y).$$

Чем больше минимальный выигрыш $\tilde{Q}_1(x)$, тем лучше x. Эта оценка слишком осторожна: на самом деле выигрыш получится наверняка больше, получиться меньше он уже не может. Такую оценку называют гарантированным выигрышем.

Теорией решения задач оптимизации, в которых: а) решение принимает не одно, а два или более лиц, а результат решения зависит от совокупности решений всех этих лиц и б) каждому лицу не известны ни решения других лиц, ни вероятностные оценки их возможных решений, занимается математическая наука "Теория игр".

Сами задачи оптимизации такого вида носят название игровых задач или задач теории игр.

В теории игр принята следующая терминология.

Лица, принимающие решения, называются игроками.

Целевые функции называются платежными функциями, и считается, что они показывают выигрыш игрока. Так, платежная функция $Q_1(x_1, \ldots, x_n)$ показывает выигрыш первого игрока.

Множество возможных решений X_i каждого игрока называется множеством чистых стратегий i-го игрока, а решение x_i из множества чистых стратегий X_i, $x_i \in X_i$ называется чистой стратегией i-го игрока.

Таким образом, чистой стратегией является то, что раньше называлось решением (управлением).

Отрицательное значение платежной функции означает "проигрыш" игрока, например, если $Q_1(x, y) = 5$, то это означает, что первый игрок выиграл 5 единиц, а если $Q_1(x, y) = -5$, то первый игрок проиграл 5 единиц. Целью первого игрока является максимизация выигрыша, т.е. функцию $Q_1(x, y)$ необходимо максимизировать. Очевидно, что целью первого игрока могла бы быть минимизация функции проигрыша $Q^1(x, y)$, которая равна функции выигрыша, взятой с обратным знаком $Q^1(x, y) = -Q_1(x, y)$. Следовательно, $Q^1(x, y) = 5$ означает, что первый игрок проиграл 5 единиц, а $Q^1(x, y) = -5$ означает, что первый игрок выиграл 5 единиц.

Эти две задачи имеют, очевидно, право на существование, однако, в теории игр первый игрок всегда полагается выигрывающим, и платежная функция $Q_1(x, y)$ определяет его выигрыш. Проигрышу соответствует отрицательное значение $Q_1(x, y)$.

Аналогичные замечания могут быть отнесены к платежной матрице Q_i любого i-го игрока.

В теории игр используется такое понятие как смешанная стратегия, являющаяся более сложной конструкцией, использующая понятие чистой стратегии.

Пусть X – множество чистых стратегий, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – n чистых стратегий из этого множества.

Пусть игрок принимает решение использовать все эти чистые стратегии с разными вероятностями $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. При этом игрок выбирает (варьирует) не чистые стратегии $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – они всегда заданы (одинаковые), а частоту (вероятность) использования каждой из них. В этом случае стратегией будет вектор вероятностей $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, игрок должен пытаться найти такую стратегию (такое значение) ξ, при которой он получит максимальный успех.

Стратегия выбора вероятности ξ называется смешанной стратегией.

Рассмотрим следующий пример. Так, чистыми стратегиями является установка орудия на север, юг, запад, восток. Смешанная стратегия $\xi = (0{,}1; 0{,}5; 0{,}2; 0{,}2)$ означает, что 10 % времени орудие смотрит на север, 50 % на юг и по 20 % времени оно повернуто на запад и восток. Если чистыми стратегиями являются покупка сахара, муки, картофеля, то $\xi = (0{,}5; 0{,}2; 0{,}3)$ означает, что деньги истрачены следующим образом: 50 % на сахар, 20 % на муку, 30 % на картофель. Принятие чистой стратегии означает, что покупатель принял решение истратить все деньги на один из этих продуктов.

Более сложные стратегии бывают в пошаговых (динамических играх), когда на каждом шаге оценивается ситуация предыдущих решений. В общем случае стратегией называется набор правил, определяющих ход игры. Которые приведут к конечному состоянию.

Если каждый из игроков выбрал стратегию, то совокупность этих стратегий называется ситуацией.

Пусть в игре двух игроков первый игрок выбрал чистую стратегию x, а второй – чистую стратегию у, тогда ситуацией будет вектор (x, y).

Ситуацией в смешанных стратегиях будет вектор (ξ, η), где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – смешанная стратегия первого игрока, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ – смешанная стратегия второго игрока, ξ_i – вероятность использования чистой стратегии x_i первым игроком, η_i – вероятность использования чистой стратегии y_i вторым игроком.

Если ситуация сформулирована, то говорят, что игра состоялась.

Оценка стратегии игрока проводится по гарантированному выигрышу, т.е. по значению минимального выигрыша для данной стратегии. Так, для первого игрока оценка стратегии x проводится по функции

$$\widetilde{Q}_1(x) = \min_{y \in Y} Q_1(x, y)\,, \tag{6.1}$$

в случае применения чистой стратегии или по функции

$$\tilde{Q}_1(\xi) = \min_{\eta \in \theta} Q_1(\xi, \eta)$$

в случае применения смешанной стратегии, где θ – множество значений вектора вероятности $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ второго игрока.

Очевидно, первому игроку хотелось бы выбрать такое x^* или такой вектор ξ^*, при котором гарантированный выигрыш $\tilde{Q}_1(x)$ принял бы максимальное значение

$$\tilde{Q}_1(x^*) = \max_{x \in X} \tilde{Q}_1(x)$$

или

$$\tilde{Q}_1^* = \tilde{Q}_1(x^*) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} Q_1(x, y) . \tag{6.2}$$

Стратегия x^*, доставляющая максимум гарантированному выигрышу $\tilde{Q}$ первого игрока, называется максиминной

$$x^* = \arg \max_{x \in X} \min_{y \in Y} Q_1(x, y) . \tag{6.3}$$

Второму игроку также хотелось бы получить максимальное значение своего гарантированного выигрыша $\tilde{Q}_2^*$, который определяется аналогичным образом

$$\tilde{Q}_2^* = \tilde{Q}_2(y^*) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} Q_2(x, y) .$$

Однако ситуация (x^*, y^*) не всегда может считаться наилучшей. Действительно, x^* – наилучшая стратегия, если y любая, а если y принимает конкретное значение y^*, то, очевидно, что в общем случае можно найти другое x^{**}, при котором $Q_1(x^{**}, y^{**})$ будет больше, чем $Q_1(x^*, y^*)$.

Наилучшей ситуацией будет такая ситуация, при которой ни первому, ни второму игроку не выгодно от нее отклоняться. В теории игр такая ситуация носит название равновесной (x^0, y^0)

$$\begin{aligned} &Q_1(x^0, y^0) \ge Q_1(x, y^0), \\ &Q_2(x^0, y^0) \ge Q_2(x^0, y). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Решением игровой задачи является нахождение наилучшей равновесной ситуации. Эта ситуация называется оптимальной.

Задачей теории игр является разработка алгоритмов нахождения равновесной (оптимальной) ситуации.

6.2 КЛАССИФИКАЦИЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ

Классификация игр, используемых в игровых задачах, представлена на рис. 6.2. Различают следующие игры.

Антагонистические игры моделируют конфликтные ситуации двух или многих лиц, интересы которых противоположны. Например, в случае двух игроков выигрыш одного равен проигрышу другого.

Неантагонистические игры (бесконфликтные) – это игры, в которых интересы сторон частично могут совпадать, они не являются диаметрально противоположными. Неантагонистические игры делятся на коалиционные и некоалиционные.

В коалиционных играх игроки могут договориться о целях, составить договор, объединиться.

Все игры делятся на конечные и бесконечные.

Конечными играми называются игры, имеющие конечное или счетное множество стратегий. В таких играх стратегии можно пометить цифрами $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, вместо множества X имеем множество (конечное или счетное) стратегий $I = \{\, i \,/\, 1, 2, \ldots, n\}$ – первого игрока и $J = \{\, j \,/\, 1, 2, \ldots, m\}$ – второго игрока.

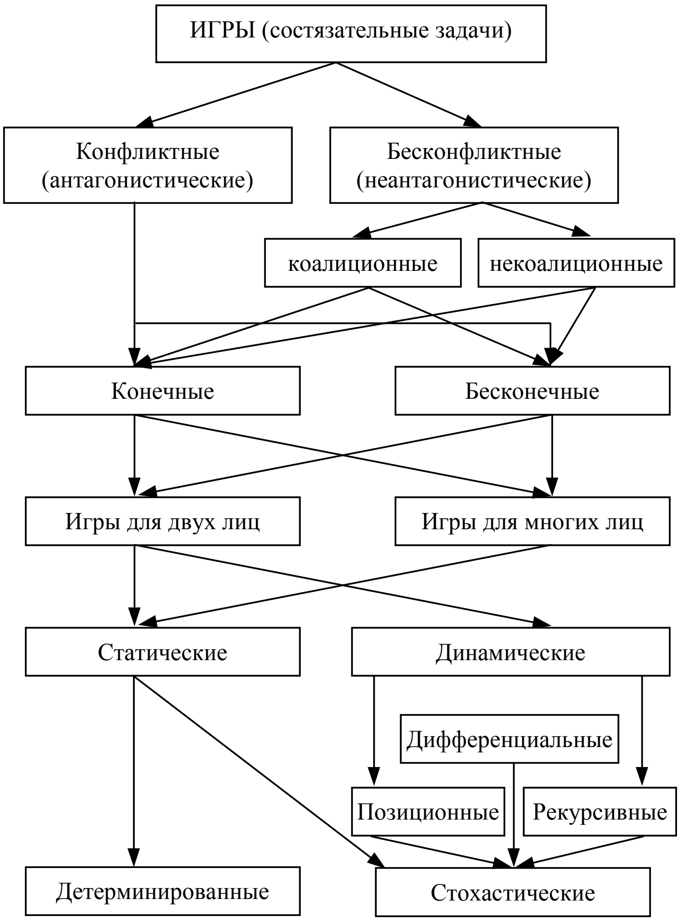


Рис. 6.2 Классификация задач теории игр

Бесконечными называются игры, в которых множество стратегий хотя бы одного игрока – континиум, т.е. непрерывно. Например, инвестиции, вкладываемые в дело.

Статическая игра – это игра, в которой игроки выбирают свои стратегии только один раз, и эти стратегии сохраняются во всех играх.

В динамической игре стратегия меняется во времени, при этом используется информация о развитии игры в прошлом. Динамические игры – многодневные.

6.3 ПАРНЫЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

6.3.1 Игры с седловой точкой

Рассматривается конечная статическая антагонистическая игра двух лиц.

Пусть первое лицо имеет n чистых стратегий $I = (1, 2, \ldots, n)$, второе лицо имеет m чистых стратегий $J = (1, 2, \ldots, m)$.

Так как игра антагонистическая, то выигрыш первого игрока равен проигрышу второго игрока. Эта игра называется еще игрой с нулевой суммой. Очевидно, что для такой игры достаточно ввести матрицу выигрышей только для одного игрока.

Первого игрока (или игрока А) условно называют выигрывающим, а второго игрока (или игрока В) – проигрывающим. Естественно, что эти обозначения условные, так как отрицательный выигрыш – это проигрыш, а положительный проигрыш – это выигрыш.

Пусть матрица выигрышей первого лица имеет вид

$$Q = \begin{vmatrix} q_{11} \cdots q_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ q_{n1} \cdots q_{nm} \end{vmatrix}. \tag{6.5}$$

Эта матрица называется платежной. Первый игрок имеет n стратегий – n строк, второй m стратегий – m столбцов.

Если первый игрок выбирает стратегию i, а второй j, то согласно матрице выигрыш первого игрока будет q_{ij}, соответственно второй игрок столько же потеряет.

$i \backslash j$	1	2	…	…	m
1	q_{11}	q_{12}	…	…	q_{1m}
2	q_{21}	q_{22}	…	…	q_{2m}
…	…	…	…	…	…
n	q_{n1}	q_{n2}	…	…	q_{nm}

В качестве примера рассмотрим игру двух лиц. Каждое лицо имеет две стратегии $I = (1, 2)$, $J = (1, 2)$, платежная матрица имеет вид

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, игроки будут рассуждать следующим образом. Задача первого игрока получить максимально возможный гарантированный выигрыш. Допустим, что он выбирает первую стратегию. В этом случае гарантировано, что он выигрывает 1. Если же выберет вторую стратегию, то выиграет 4.

	1	2		S_i
1	1	5		1
2	2	4		4

Для общего случая аналогичным образом для каждой стратегии первого игрока может быть найден гарантированный выигрыш $S_i = \min\limits_j q_{ij}$.

	1	2	…	m		S_i
1	q_{11}	q_{12}	…	q_{1m}		S_1
2	q_{21}	q_{22}	…	q_{2m}		S_2
…	…	…	…	…		…
n	q_{n1}	q_{n2}	…	q_{nm}		S_n

Для i-й стратегии первого игрока выигрыш не может быть меньше, чем S_i, он будет больше, если второй игрок ошибется, но меньше S_i он быть не может. Поэтому первому игроку естественно взять ту стратегию, где S_i больше. Эта стратегия называется максиминной

$$i^0 = \arg\left[\max_i \min_j q_{ij}\right] = \arg\left[\max_i S_i\right], \tag{6.6}$$

величина $\max\limits_i \min\limits_j q_{ij} = \underline{\nu}$ называется нижней ценой игры.

Если первый игрок будет стремиться к максиминной стратегии, то ни при каких условиях его выигрыш не будет меньше, чем $\underline{\nu}$: $Q^0(i^0, j) \geq \underline{\nu}$ для любого j.

Таким образом получим, что $i^0 = 2$, $\underline{\nu} = 4$.

Для второго игрока поступают аналогичным образом. Его желание уменьшить выигрыш первого игрока, так как это и есть его проигрыш.

	1	2	…	m
1	q_{11}	q_{12}	…	q_{1m}
2	q_{21}	q_{22}	…	q_{2m}
…	…	…	…	…
n	q_{n1}	q_{n2}	…	q_{nm}
l_j	l_1	l_2	…	l_m

Для каждого столбца находится величина $l_j = \max_i q_{ij}$, которая определяет гарантированный проигрыш второго игрока. Больше он проиграть не может.

В рассматриваемом примере имеем следующее.

	1	2
1	1	5
2	2	4
l_j	2	5

Таким образом, при первой стратегии второго игрока, максимально, что может выиграть первый игрок, а второй проиграть – это 2. Больше проиграть последний не может. Если первый игрок ошибается, то он проигрывает меньше, больше проиграть он не может.

При второй стратегии второго игрока гарантированный проигрыш составит 5, больше он проиграть не может.

Какую же стратегию – первую или вторую выбрать второму игроку? Очевидно первую, так как проигрыш будет всего лишь 2 при любой стратегии первого игрока

$$j^0 = \arg\left[\min_j l_j\right] = \arg\left[\min_j \max_i q_{ij}\right]. \tag{6.7}$$

Эта стратегия носит название минимаксной, а величина

$$\overline{\nu} = \min_j \max_i q_{ij}$$

носит название верхней цены игры.

Нижняя и верхняя цены игры дают гарантированный уровень выигрыша и проигрыша для первого и второго игроков:

$$Q(i^0, j) \geq \underline{\nu}, \text{ для ллюбог } j;$$

$$Q(i, j^0) \leq \overline{\nu}, \text{ для ллюбог } i.$$

Если $\underline{\nu} = \overline{\nu}$, то говорят, что игра имеет седловую точку. Смысл ее понятен, если рассмотреть непрерывный случай. Значение $\nu = \underline{\nu} = \overline{\nu}$ называется ценой игры.

Ситуация (i^0, j^0) является оптимальной (i^*, j^*), так как она устойчива. Это ясно видно на рассмотренном примере $\underline{\nu} = \overline{\nu} = 2$, $i^0 = 2$, $j^0 = 1$ и ни одному игроку не выгодно ее менять

$$Q(i, j^*) \le Q(i^*, j^*) \le Q(i^*, j).$$

Таким образом ситуация с минимаксной и максиминной стратегиями двух игроков является оптимальной и является решением игры при наличии седловой точки, т.е. $\underline{v} = \overline{v}$.

Для полного понимания термина "седловая точка" рассмотрим непрерывную задачу. Итак, $x \in X$, $y \in Y$, x и y непрерывны, вместо платежной матрицы имеется платежная функция для первого игрока $Q(x, y)$. При этом как и раньше выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Максиминная стратегия первого игрока и минимаксная стратегия второго игрока находятся аналогичным образом дискретному случаю, т.е.

$$\begin{aligned} x^0 &= \arg\left[\max_x \min_y Q(x, y)\right], \ \max_x \min_y Q(x, y) = \underline{v}; \\ y^0 &= \arg\left[\min_y \max_x Q(x, y)\right], \ \min_y \max_x Q(x, y) = \overline{v}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Если $\underline{v} = \overline{v}$, то имеется седловая точка. Графическая иллюстрация рассматриваемого непрерывного случая представлена на рис. 6.3.

6.3.2 Антагонистические игры без седловой точки

Предположим, что верхняя и нижняя цены игры, как и в предыдущем случае, равны

$$\underline{v} = \min_i \max_j q_{ij}, \quad \overline{v} = \max_j \min_i q_{ij}, \tag{6.9}$$

но $\underline{v} \ne \overline{v}$. В этом случае седловая точка отсутствует.

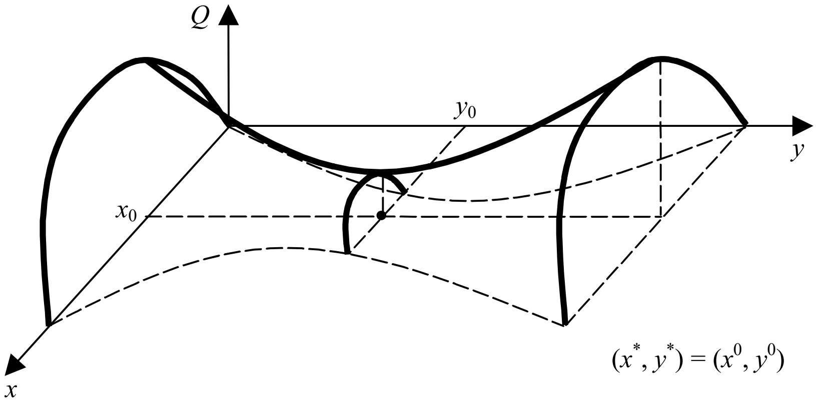


Рис. 6.3 Графическая иллюстрация оптимального решения в антагонистической игре с седловой точкой

Например, матрица платежей имеет вид

	1	2	S_i
1	1	3	1
2	4	2	2
l_j	4	3	

Очевидно, что $\underline{v} = 2, i^0 = 2; \overline{v} = 3, j^0 = 2.$ Как и раньше $Q(i^0, j) \ge 2,\ Q(i, j^0) \le 3.$ Однако условие устойчивости $Q(i, j^0) \le Q(i^0, j^0) \le Q(i^0, j)$ не соблюдается. Это означает, что (i^0, j^0) не является оптимальной ситуацией, так как она неустойчива. Первому игроку выгодно сменить стратегию, тогда выигрыш будет равен 3, а не 2. Соответственно второй игрок проиграет 3. Если он сам сменит стратегию на первую, то уменьшит свой проигрыш до единицы, а значит и уменьшит выигрыш первого игрока до единицы. Это и означает неустойчивость ситуации (i^0, j^0).

Таким образом, если $\underline{v} \neq \overline{v}$ седловая точка отсутствует и в чистых стратегиях нет устойчивой ситуации, т.е. нет решения игровой задачи. В этом случае следует использовать смешанные стратегии.

Смешанная стратегия – это стратегия, которая использует все чистые стратегии с разными вероятностями.

Пусть смешанная стратегия первого игрока $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, где ξ_i – вероятность использования i-й чистой стратегии, смешанная стратегия второго игрока $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$, где η_i – вероятность использования j чистой стратегии.

Множества Е и Θ смешанных стратегий представляют собой многоугольник в пространстве вероятностей чистых стратегий.

Если имеется две чистых стратегии $I = (1, 2)$, то в этом случае смешанная стратегия будет $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, а множество всех возможных смешанных стратегий определяется прямой $\xi_1 + \xi_2 = 1$ (рис. 6.4). Очевидно, (0, 1) – чистая стратегия при $i = 2$, (1, 0) – чистая стратегия при $i = 1$.

Если имеется три чистых стратегии $i = 1, 2, 3$, то в пространстве $\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_3$ вероятностей имеется плоскость, определяемая уравнением $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ (рис. 6.5).

При этом чистые стратегии это при: $i = 1$ – (1,0,0); $i = 2$ – (0,1,0); $i = 3$ – (0,0,1).

Остальные стратегии – точки на поверхности, они определяются соответствующими значениями (ξ_1, ξ_2, ξ_3).

Целевая функция определяется формулой

$$\overline{Q}(\xi, \eta) = q_{11}\xi_1\eta_1 + q_{12}\xi_1\eta_2 + \ldots + q_{nm}\xi_n\eta_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q_{ij}\xi_i\eta_j, \qquad (6.10)$$

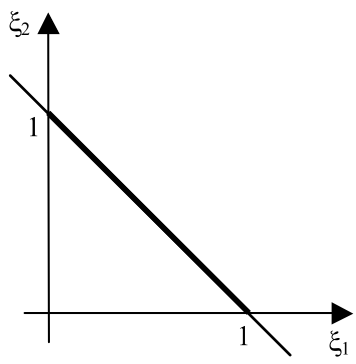


Рис. 6.4 Множество смешанных стратегий при i = 1, 2

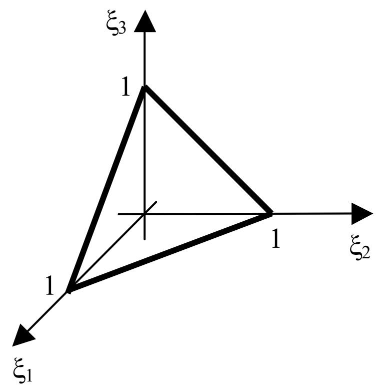


Рис. 6.5 Множество смешанных стратегий при i = 1, 2, 3

так как вероятность одновременного совершения i-й стратегии первого игрока и j-й стратегии второго игрока будет $\xi_i\eta_i$. Эта функция $\overline{Q}(\xi, \eta)$ непрерывно зависит от ξ и η, и поэтому в смешанной стратегии исчезает платежная матрица и появляется платежная функция, которая для двух игроков равна

$$\overline{Q}(\xi, \eta) = q_{11}\xi_1\eta_1 + q_{12}\xi_1\eta_2 + q_{21}\xi_2\eta_1 + q_{22}\xi_2\eta_2. \qquad (6.11)$$

Нижнее и верхнее значения игры для смешанной стратегии определяются как для непрерывной игры

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \max_{\xi \in E} \min_{\eta \in \theta} \overline{Q}(\xi, \eta), \\ \overline{v} &= \min_{\eta \in \theta} \max_{\xi \in E} \overline{Q}(\xi, \eta). \end{aligned} \qquad (6.12)$$

При этом максиминная стратегия ξ^0 определяется как

$$\xi^0 = \arg\left[\max_{\xi \in E} \min_{\eta \in \theta} \overline{Q}(\xi, \eta)\right], \tag{6.13}$$

а минимаксная стратегия η^0 как:

$$\eta^0 = \arg\left[\min_{\eta \in \theta} \max_{\xi \in E} \overline{Q}(\xi, \eta)\right]. \tag{6.14}$$

В теории игр доказывается, что в смешанных стратегиях всегда существует $\underline{\nu} = \overline{\nu}$, т.е. седловая точка.

Значение $\nu = \underline{\nu} = \overline{\nu}$ называется ценой игры со смешанными стратегиями. Значения ξ^0, η^0, соответствующие седловой точке, образуют устойчивую, а значит оптимальную ситуацию (ξ^0, η^0) = (ξ^*, η^*).

6.3.3 Алгоритмы решения задач без седловых точек

Пусть ξ^*, η^* – оптимальные стратегии. Номера чистых стратегий ξ^* и η^*, вероятности которых не равны нулю, называются спектрами S_ξ, S_η соответственно

$$S_\xi = \{i = 1, 2, \ldots, n / \xi_i \neq 0\},$$

$$S_\eta = \{j = 1, 2, \ldots, n / \eta_j \neq 0\}.$$

Иногда их называют реальными чистыми стратегиями.

Можно доказать, что

1) если S_ξ содержит K чистых стратегий, то S_η также содержит K чистых стратегий;

2) если один из игроков придерживается минимаксной (максиминной) стратегии, а другой выбирает реальную чистую стратегию (т.е. стратегию принадлежащую спектру), то выигрыш первого игрока остается равным значению ν.

6.3.3.1 Игра 2 × 2

	1	2
1	q_{11}	q_{12}
2	q_{21}	q_{22}

Чистые стратегии I = (1, 2), J = (1, 2).

В спектр входят обе стратегии. Если бы в спектр одного игрока входила бы одна стратегия S_ξ = (1), то и в спектр другого игрока также бы вошла одна стратегия S_η = (2), а это значит, что была бы седловая точка.

Допустим, что первый игрок придерживается максиминной стратегии $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*)$, а второй выбрал чистую стратегию j = 1. Тогда эти стратегии входят в спектр чисел

$$q_{11}\xi_1^* + q_{21}\xi_2^* = \nu.$$

Для чистой стратегии j = 2 аналогичным образом можно записать

$$q_{12}\xi_1^* + q_{22}\xi_2^* = \nu.$$

Кроме того, $\xi_1^* + \xi_2^* = 1$.

Таким образом, имеем три уравнения и три неизвестных. Следовательно, решение однозначно.

Пусть теперь второй игрок придерживается минимаксной стратегии (η_1^*, η_2^*), а первый чистой. Тогда аналогичным образом, как и предыдущем случае, имеем:

$$q_{11}\eta_1^* + q_{12}\eta_2^* = \nu,$$
$$q_{21}\eta_1^* + q_{22}\eta_2^* = \nu,$$
$$\eta_1^* + \eta_2^* = 1.$$

Решение этих уравнений дает следующие расчетные формулы:

$$\nu = \frac{q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}}{q_{11} + q_{22} - (q_{12} + q_{21})},$$

$$\xi_1^* = \frac{q_{22} - q_{21}}{q_{11} + q_{22} - (q_{12} + q_{21})},$$

$$\xi_2^* = 1 - \xi_1^*,$$

$$\eta_1^* = \frac{q_{22} - q_{12}}{q_{11} + q_{22} - (q_{12} + q_{21})},$$

$$\eta_2^* = 1 - \eta_1^*.$$

Решение рассматриваемой антагонистической игры 2 × 2 можно найти геометрическим способом.

Пусть игрок B выбрал первую стратегию (j = 1). Значение целевой функции в этом случае будет

$$\overline{Q} = \xi_1 q_{11} + \xi_2 q_{21},$$

или с учетом $\xi_1 = 1 - \xi_2$

$$\overline{Q} = (1 - \xi_2)\, q_{11} + \xi_2 q_{21}.$$

Как только первый игрок выберет стратегию ξ_2, целевая функция $\overline{Q}$ приобретет определенное значение. В зависимости от значения ξ_2 функция $\overline{Q}$ будет изменяться по прямой (рис. 6.6).

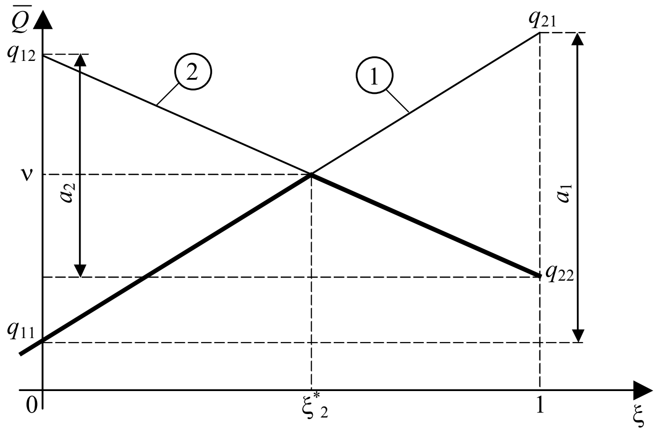


Рис. 6.6 Геометрическое решение антагонистической игры 2 × 2

Если $\xi_2 = 0$, то имеем чистую стратегию первого игрока i = 1 и значение целевой функции $Q = q_n$. Если $\xi_2 = 1$, то имеем вторую стратегию первого игрока i = 2 и значение целевой функции $Q = q_{21}$. При $0<\xi_2<1$ имеем смешанную стратегию $\xi = (\xi_1,\xi_2)$ и определенные значения целевой функции $\overline{Q}$. Так при выборе вторым игроком второй стратегии целевая функция будет

$$\overline{Q} = \xi_1 q_{12} + \xi_2 q_{22} = (1 - \xi_2)\, q_{12} + \xi_2 q_{22}.$$

Таким образом, имеется две стратегии 1 и 2 второго игрока. Для каждого значения ξ_2 второй игрок будет выбирать стратегию, которая уменьшает выигрыш первого игрока. На рис. 6.6 жирной линией обозначена линия минимумов целевой функции. Первый игрок, желая максимизировать выигрыш, вы-

берет стратегию ξ^*_2, соответствующую максимину. Следовательно, оптимальной стратегией является стратегия
$\xi^* = (\xi_1^*, \xi^*_2)$, где $\xi_1^* = 1 - \xi_2^*$. Соответствующее значение целевой функции $\overline{Q}$ есть цена игры. Стратегия второго игрока определяется численно из выражения

$$q_{11}\eta_1^* + q_{12}(1-\eta_1^*) = \nu$$

или графически

$$\eta_1^* = \frac{a_2}{a_1 + a_2}, \quad \eta_2^* = \frac{a_1}{a_1 + a_2}$$

где $a_1 = |q_{21} - q_{11}|, \; a_2 = |q_{12} - q_{22}|$.

П р и м е р 6.1. Найти решение антагонистической игры 2×2, если платежная матрица имеет вид $Q = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Как было показано выше $i^0 = 2, \; j^0 = 2, \; \underline{\nu} = 2, \; \overline{\nu} = 3, \; \underline{\nu} \ne \overline{\nu}$.

Графическое решение задачи представлено на рис. 6.7.

Из рис. 6.7 имеем

$$\xi_2^* = 0{,}5; \;\; \nu = 2{,}5; \;\; \xi_1^* = 0{,}5; \;\; a_1 = 3; \;\; a_2 = 1; \;\; \eta_1^* = 1/4; \;\; \eta_2^* = 3/4.$$

Таким образом, первый игрок должен 50 % времени использовать свою первую стратегию и 50 % времени вторую чистую стратегию. Второй игрок 25 % времени использует свою первую стратегию и 75 % времени – вторую. При этом первый игрок выиграет 2,5 единицы (не меньше 2,5), второй проиграет не больше 2,5.

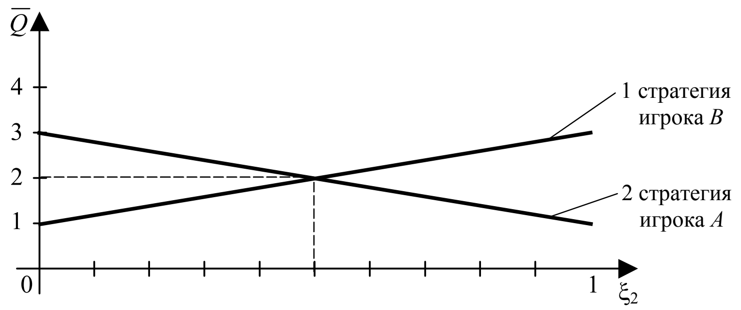


Рис. 6.7 Геометрическое решение антагонистической игры 2 × 2 с платежной матрицей $Q = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

6.3.3.2 Игра 2 × *m*

Рассматривается игра с платежной матрицей $Q = \left\| q_i^j \right\|_2^m$

	1	2		m
1	q_{11}	q_{12}	…	q_{1m}
2	q_{21}	q_{22}	…	q_{2m}

Геометрическое решение задачи проводится аналогично игре 2 × 2. Для этого необходимо нанести линии, соответствующие 1, 2, …, *m* стратегиям второго игрока. Всего получается *n* линий (рис. 6.8)

$$\overline{Q} = q_{1j}\eta_1 + q_{2j}\eta_2 = q_{1j}(1-\xi_2) + q_{2j}\xi_2.$$

Какую бы стратегию ξ_2 не выбрал первый игрок, т.е. (ξ_1, ξ_2), где $\xi_1 = 1 - \xi_2$, второй игрок минимизирует ее (выбирает стратегию, при которой выигрыш будет минимальным). Линия минимума на рис. 6.8 показана жирной линией, среди всех точек которой значение целевой функции $\overline{Q}$ будет максимально – это будет точка *O*.

По этой точке находится ξ_2^* и соответственно $\xi_1^* = 1 - \xi_2^*$, а также цена игры $\nu = \overline{Q}(\xi_2^*)$.

В оптимальном спектре первого игрока имеется две стратегии, следовательно, оптимальный спектр второго игрока также содержит две стратегии. Это стратегии *а* и *б*, проходящие через точку *O*. Использование этих двух стратегий вторым игроком не дает первому игроку выиграть больше, чем ν. Таким образом, игра свелась к игре 2 × 2, где у второго игрока имеются две существенные стратегии *а* и *б*.

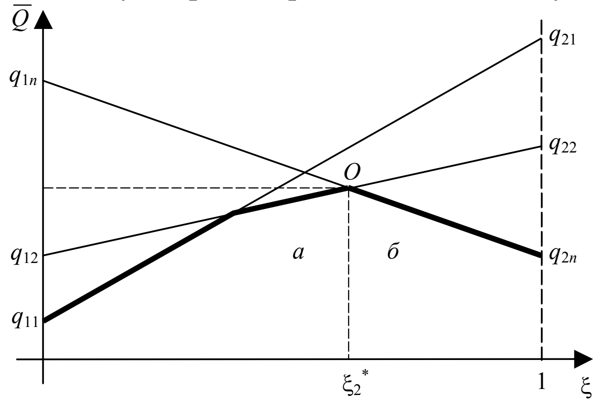


Рис. 6.8 Геометрическое решение антагонистической игры 2 × *m*

П р и м е р 6.2. Требуется найти решение игры с платежной матрицей вида

	1	2	3	4	5	
1	–4	–1	2	5	6	–1
2	11	5	6	3	–2	–1
	10	4	5	5	6	
a		6			8	

$\underline{\nu} \neq \overline{\nu}$

Графическое решение задачи представлено на рис. 6.9.

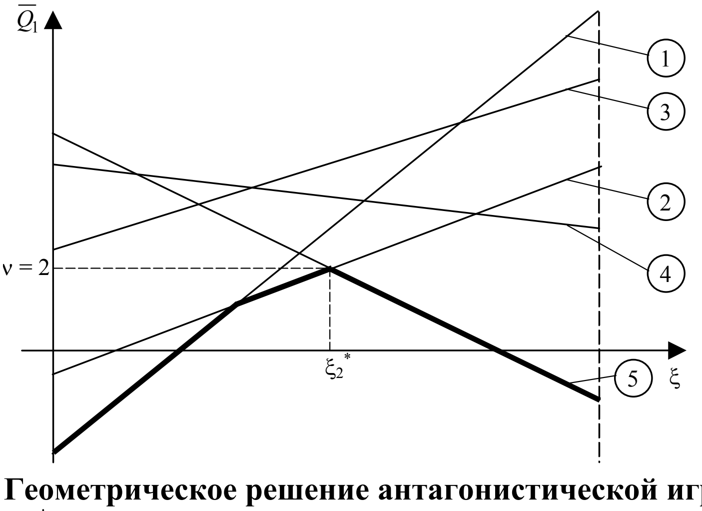


Рис. 6.9 Геометрическое решение антагонистической игры 2 × 5

Из рисунка видно, что $\xi_2^* = 0{,}5$, ν=2, оптимальный спектр стратегий игроков составляют 2 и 5 стратегии. При этом $a_2 = 6$, $a_5 = 8$ и $\eta_2^* = 3/7$, $\eta_5^* = 4/7$ ($\eta_2^* = \dfrac{a_2}{a_2 + a_5}$, $\eta_5^* = 1 - \eta_2^*$).

Таким образом, игра свелась к матрице

	2	5
1	–1	6
2	5	–2

Оптимальные стратегии $\xi^* = (0{,}5;\ 0{,}5)$, $\eta^* = (0,\ 3/7,\ 0,\ 0{,}4/7)$.

Аналогично ищется решение игры $n \times 2$. В этом случае строится график изменения значений целевой функции $\overline{Q}$ при чистых стратегиях первого игрока в зависимости от смешанной стратегии η_2 и определяется минимаксная оптимальная стратегия второго игрока η_2^*.

6.3.3.3 Игра $n \times m$

При решении матричной игры размерностью $n \times m$ могут быть применены два приема:

1) сведение задачи к задаче $2 \times m$ или $n \times 2$;
2) сведение задачи к задаче линейного программирования.

Для упрощения задачи с матрицей $n \times m$ используются определенные правила.

Говорят, что стратегия i_1 первого игрока доминирует стратегию i_2, если для всех $j = 1, 2, \ldots, m$ имеет место $q_{i_1 j} \geq q_{i_2 j}$.

В этом случае стратегия i_2 заведомо хуже стратегии i_1. Стратегия i_2 называется доминируемой и может быть исключена из рассмотрения.

Говорят, что стратегия j^* доминирует стратегию $\bar{j}$ второго игрока, если для любого i справедливо $q_{ij^*} \leq q_{i\bar{j}}$.

Здесь стратегия $\bar{j}$ заведомо хуже стратегии j^*, она называется доминируемой и может быть удалена из рассмотрения.

На рис. 6.10 показано две стратегии первого игрока, вторая стратегия доминирует первую и поэтому может быть исключена из рассмотрения.

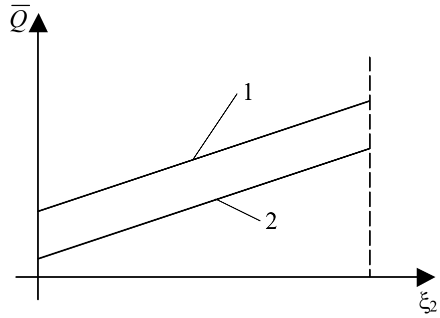


Рис. 6.10 Иллюстрация доминируемой стратегии

При решении игровых задач используются следующие важные теоремы.

Т е о р е м а 1

Ни одна из строго доминирующих чистых стратегий не содержится в спектре оптимальных решений.

Т е о р е м а 2

Если некоторая чистая стратегия *а*, доминируется смешанной стратегией *в*, в спектре которой нет *а*, то удаление *а* приводит к тождественной игре.

В качестве примера рассмотрим игру, представленную на рис. 6.11. Здесь ни одна из стратегий 1 или 2 не доминирует стратегию 3 .

Рассмотрим смешанную стратегию $\eta = (0{,}5;\ 0{,}5;\ 0)$. Для этой стратегии имеем $\overline{Q} = \overline{Q}_1 0{,}5 + \overline{Q}_2 0{,}5$, где $\overline{Q}_1$ – значение целевой функции для первой стратегии, а $\overline{Q}_2$ – для второй стратегии.

Значения целевой функции $\overline{Q}$ на рис. 6.11 показаны пунктирной линией и эта стратегия доминирует стратегию 3 . Согласно теореме 2 стратегия 3 может быть удалена.

Т е о р е м а 3

Решения игр будут тождественными, если каждый элемент платежной матрицы преобразуется следующим образом

$$\overline{q}_{ij} = kq_{ij} + b,$$

где $k > 0$, $b > 0$ – любые числа.

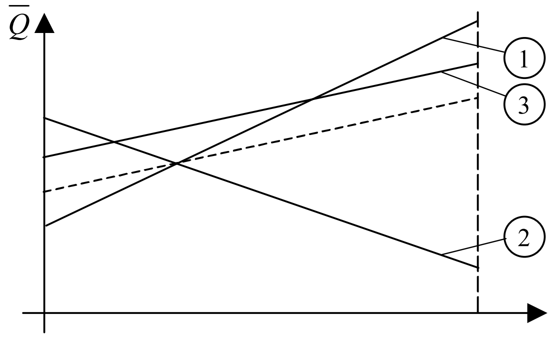


Рис. 6.11 Иллюстрация теоремы 2

Таким образом, без изменения оптимального решения каждый элемент платежной матрицы можно умножить на любое положительное число и сложить с любым положительным числом. При этом новая цена игры $\overline{\nu}$ будет связана с реальной ценой соотношением $\overline{\nu} = k\nu + b.$

Пример 6.3. Рассматривается игра 4 × 5.

Необходимо провести последовательные преобразования платежной матрицы.

	1	2	3	4	5
1	4*p*	4*p*	2*p*	3*p*	2*p*
2	1*p*	3*p*	1,5*p*	2*p*	4*p*
3	2*p*	2*p*	8*p*	4*p*	6*p*
4	2*p*	1*p*	1*p*	0,5*p*	0,5*p*

Преобразование платежной матрицы складывается из следующих этапов.

1 Все элементы платежной матрицы делятся на p, в результате получается следующая матрица.

	1	2	3	4	5
1	4	4	2	3	2
2	1	3	1,5	2	4
3	2	2	8	4	6
4	2	1	1	0,5	0,5

2 Третья стратегия первого игрока доминирует четвертую стратегию, следовательно четвертая стратегия может быть отброшена, и исходная матрица преобразуется к виду.

	1	2	3	4	5
1	4	4	2	3	2
2	1	3	1,5	2	4
3	2	2	8	4	6

3 Вторая стратегия второго игрока доминирует первую стратегию, следовательно эта (первая) стратегия исключается и матрица преобразуется к матрице размерности 3 × 4.

	2	3	4	5
1	4	2	3	2
2	3	1,5	2	4
3	2	8	4	6

4 В полученной матрице чистых доминирующих стратегий больше нет. Однако, первая и третья стратегии первого игрока образуют смешанную стратегию ξ_1 = 0,5, ξ_3 = 0,5, которая доминирует стратегию 2 . Вторая стратегия удаляется и игра принимает размерность 2 × 5.

	2	3	4	5
1	4	2	3	2

3	2	8	4	6

Игру 2 × 4 можно решать графически, но можно продолжить подобные преобразования дальше, они дадут последующее упрощение задачи.

5 В игре 2 × 4 пятая стратегия второго игрока доминирует третью, отбрасывание которой приводит к игре 2 × 3.

	2	4	5
1	4	3	2
3	2	4	6

Смешанная стратегия второго игрока $\xi_2 = 0{,}5$ и $\xi_5 = 0{,}5$ доминирует четвертую стратегию, исключение которой приводит к игре 2 × 2.

	2	5
1	4	2
3	2	6

6.4 РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Если нельзя методами упрощения свести игровую задачу к размерности $2 \times m$ или $n \times 2$, то ее заменяют задачей линейного программирования.

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования является общим методом решения подобных задач.

Пусть цена игры ν. Эта величина является максимальным гарантированным выигрышем первого игрока. Так, если первый игрок поддерживает оптимальную смешанную стратегию ξ^*, его выигрыш не может быть меньше ν. Однако, если первый игрок поддерживает не оптимальную стратегию ξ^*, а некоторую другую стратегию ξ, то существует некоторый гарантированный выигрыш ν_1, т.е. при любой стратегии второго игрока, выигрыш первого не может быть меньше ν_1. При этом $\nu_1 \le \nu$, и задача первого игрока найти такую стратегию ξ^*, при которой ν_1 примет максимальное значение, равное ν.

Геометрическую интерпретацию этого положения можно просмотреть на примере задачи $2 \times n$ (рис. 6.12).

Если взять $\xi_2 \ne \xi_2^*$, гарантированный выигрыш ν_1 будет меньше цены игры ν.

Таким образом, задача матричной игры может быть сформулирована для первого игрока как задача нахождения такой стратегии $\xi^* = (\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*)$, при которой максимизируется величина $\nu_1 : \nu_1 \to \max$, при условии, что выигрыш первого игрока при любых чистых стратегиях $j = 1, \ldots, m$ второго игрока будет больше ν_1:

$$
\begin{aligned}
&q_{11}\xi_1 + q_{21}\xi_2 + \cdots + q_{n1}\xi_n \ge \nu_1;\\
&q_{12}\xi_1 + q_{22}\xi_2 + \cdots + q_{n1}\xi_n \ge \nu_1;\\
&\qquad\cdots\\
&q_{1m}\xi_1 + q_{2m}\xi_2 + \cdots + q_{nm}\xi_n \ge \nu_1;\\
&\xi_1 \ge 0, \xi_2 \ge 0, \ldots, \xi_n \ge 0.
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

Кроме того считают, что $\nu_1 > 0$. Это всегда можно сделать, прибавив к составляющим матрицы $\left\| q_{ij} \right\|$ одно и то же положительное число.

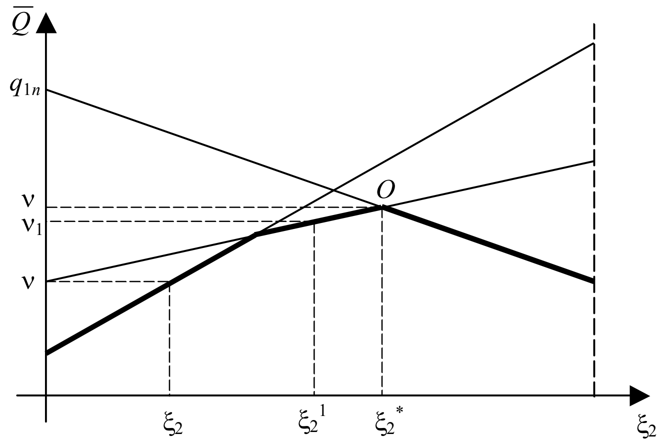


Рис. 6.12 Геометрическая иллюстрация игры 2 × *n*

Разделив на $\nu_1 > 0$ левые и правые части неравенств и введя новые переменные $u_i = \xi_i / \nu_1$, система неравенств преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &q_{11}u_1 + q_{21}u_2 + \cdots + q_{n1}u_n \ge 1; \\ &q_{12}u_1 + q_{22}u_2 + \cdots + q_{n1}u_n \ge 1; \\ &\qquad \cdots \\ &q_{1m}u_1 + q_{2m}u_2 + \cdots + q_{nm}u_n \ge 1; \\ &u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0, \ldots,\ u_n \ge 0. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{1}{\nu_1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \frac{1}{\nu_1},\ \text{так как}\ \sum_{i=1}^{n}\xi_i = 1, \tag{6.17}$$

тогда $\sum_{i=1}^{n} u_i$ является критерием, обратным ν_1.

С учетом сказанного задача теории игр превращается в следующую задачу линейного программирования.

Требуется найти такие u_i^*, $i = 1, 2, \ldots, n$, при которых целевая функция $\sum_{i=1}^{n} u_i$ принимает минимальное значение

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \to \min \tag{6.18}$$

и удовлетворяются ограничения

$$\begin{aligned} &q_{11}u_1 + q_{21}u_2 + \cdots + q_{n1}u_n \ge 1; \\ &q_{12}u_1 + q_{22}u_2 + \cdots + q_{n1}u_n \ge 1; \\ &\qquad \cdots \\ &q_{1m}u_1 + q_{2m}u_2 + \cdots + q_{nm}u_n \ge 1; \\ &u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0,\ \ldots,\ u_n \ge 0. \end{aligned} \tag{6.19}$$

После решения этой задачи – задачи линейного программирования определяются цена игры ν и значения ξ_i^* по следующим формулам

$$\begin{aligned} &\nu = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} u_i^*; \\ &\xi_i^* = \nu u_i^*; \\ &\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Аналогично для определения оптимальной стратегии $\eta^* = (\eta_1^*, \ldots, \eta_m^*)$ второго игрока решается следующая задача

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \to \max \tag{6.21}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^* q_{ij} > 1; \text{ то } x_j^* = 0. \qquad (6.22)$$

В результате решения задачи получают оптимальные значения x_1^*, x_2^*, …, x_m^*, которые позволяют определить оптимальную стратегию второго игрока по формулам

$$\nu = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} x_j^*};$$

$$\eta_j^* = \nu u_j^*; \qquad (6.23)$$

$$\eta^* = (\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_m^*).$$

Задача линейного программирования для второго игрока двойственна задаче линейного программирования для первого игрока, а это означает, что

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^* = \sum_{i=1}^{n} u_i^*, \qquad (6.24)$$

т.е. $\nu_1^* = \nu_2^*$ и представляет цену игры ν.

Из двойственности задачи следует, что

1) если стратегия первого игрока является смешанной и ее спектр состоит из k чистых стратегий, то стратегия второго игрока также будет смешанной со спектром, состоящим из k чистых стратегий;

2) если для некоторого j выполняется строгое неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^* q_{ij} > 1; \text{ то } x_j^* = 0.$$

3) если для некоторого i выполняется строгое неравенство

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^* q_{ij} > 1; \text{ то } u_j^* = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1993. 336 с.

2 Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Издатинлит, 1960. 400 с.

3 Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. 458 с.

4 Бояринов А.И., Кафаров В.В. Методы оптимизации в химии и химической технологии. М.: Химия, 1975. 576 с.

5 Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Наука, 1980. 230 с.

6 Гасс С. Линейное программирование. М.: Физматиз, 1961. 304 с.

7 Дегтярев Ю.И. Исследование операций. М.: Высшая школа, 1986. 320 с.

8 Исследование операций / Под ред. Дж. Маддер, С. Элмагараби. М.: Мир, 1981. Т. 1. 712 с.

9 Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Физматмет, 2000. 264 с.

10 Кузин Л.Т. Основы кибернетики. М.: Энергия, 1973. Т. 1: Математические основы кибернетики. 504 с.

11 Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 708 с.

12 Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998. 304 с.

13 Полак Э. Численные методы оптимизации. М.: Мир, 1997. 376 с.

14 Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике: В 2 ч. М.: Финансы и статистика, 1999. 224 с.

15 Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 534 с.

16 Эддонс М., Стенсфильд Р. Методы принятия решений. М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. 590 с.

17 Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений. М.: Наука, 1989. 316 с.

18 Юдин Д.Б., Гальштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. М.: Наука, 1969. 424 с.