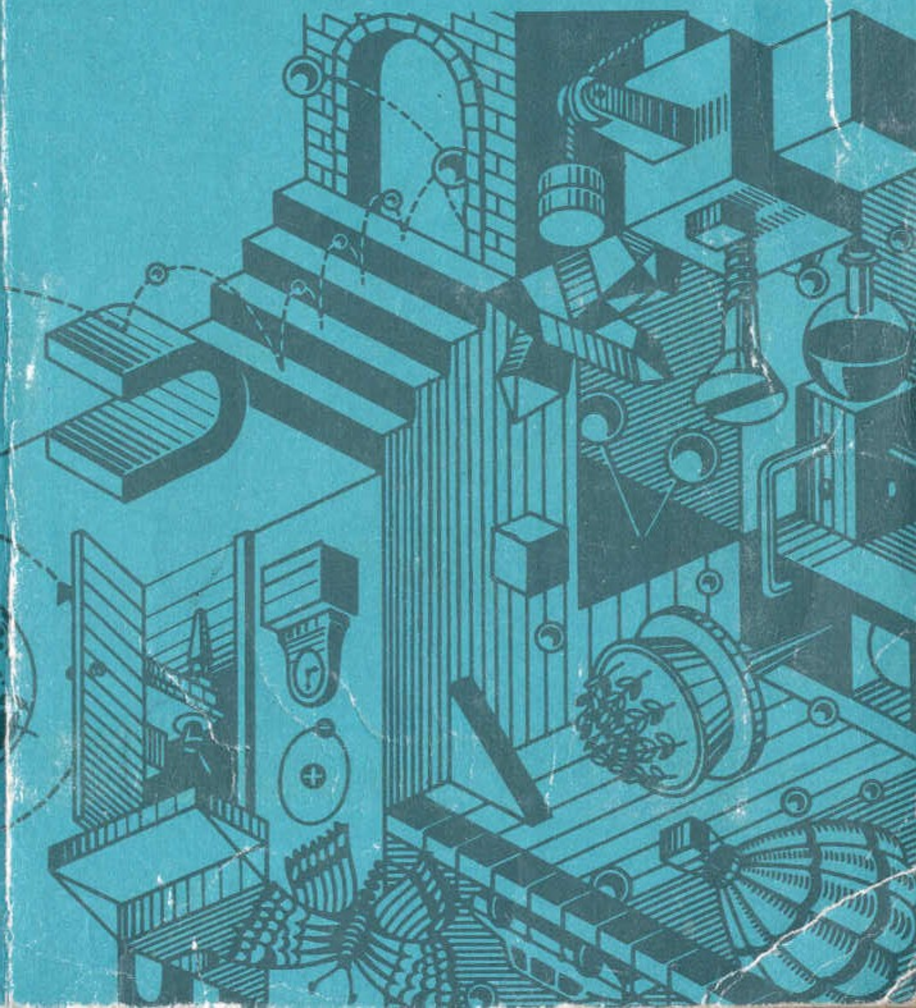
Т. И. ТРОФИМОВА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ ФИЗИКИ



Т.И.ТРОФИМОВА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ ФИЗИКИ

Рекомендовано
Государственным комитетом
Российской Федерации
по высшему образованию
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических
учебных заведений

Издательство «Высшая школа»

Москва 1996

ББК 22.31
Т70
УДК 530.1(076)

Рецензент: проф. В. А. Касьянов

Трофимова Т. И.
Т70 Сборник задач по курсу физики: Учеб. пособие для студентов втузов. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 1996. — 303 с: ил.
ISBN 5-06-003395-3

Пособие состоит из семи частей, соответствующих разделам программы курса физики для втузов, и содержит более 1400 задач, полностью охватывающих изучаемый курс. По содержанию оно тесно увязано с материалом «Курса физики» Трофимовой Т. И. (М., Высш. шк., 1994).

Т $\frac{1604010000 - 067}{001(01) - 96}$ 40 — 96 ББК 22.31

ISBN 5-06-003395-3

Предисловие

Физика — фундаментальная база для теоретической подготовки инженеров, без которой его успешная деятельность невозможна.

На всех этапах обучения большое значение имеет практическое применение теоретических знаний, одним из которых при изучении курса физики является решение задач. Особенно это важно при совершенствовании различных форм самостоятельной работы студентов.

Предлагаемый сборник задач соответствует «Курсу физики» Т. И. Трофимовой (издательство «Высшая школа», 1994). Данное пособие задумано как практическое применение изложенного в «Курсе физики» теоретического материала. Поэтому его издание можно рассматривать как создание единого комплекса по курсу физики, предназначенного для втузов с ограниченным числом часов по физике, особенно для вечерней и заочной форм обучения.

В сборнике в начале каждого раздела даны перечень основных законов и формул, на основе которых решаются задачи данного и последующих разделов, и примеры решения задач по теме данного раздела. Все задачи снабжены ответами, которые даны с точностью до трех значащих цифр. Таким же числом значащих цифр выражены величины в условиях задач и справочных таблицах, приведенных в конце задачника. Значащие цифры — нули, стоящие в конце чисел, — для упрощения записи опускаются. В условиях задач и в ответах используются кратные и дольные единицы, образованные от единиц СИ.

Автор выражает искреннюю признательность проф. В. А. Касьянову за высказанные им ценные замечания.

Автор

Методические указания

Решая задачи, целесообразно использовать следующие методические указания:

1. Вникнув в условие задачи, сделать краткую запись условия, выразить все данные в СИ и, где это только возможно, дать схематический чертеж, поясняющий содержание задачи.

2. Установив, какие физические законы лежат в основе данной задачи, решить ее в общем виде, т. е. выразить искомую физическую величину через заданные в задаче величины (в буквенных обозначениях, без подстановки числовых значений в промежуточные формулы).

3. Проверив правильность общего решения, подставить числа в окончательную формулу и указать единицу искомой физической величины, проверив правильность ее размерности.

I Физические основы механики

1.1. Элементы кинематики

Основные законы и формулы

- Средняя и мгновенная скорости материальной точки

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad \langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad v = \frac{ds}{dt},$$

где $\Delta \mathbf{r}$ — элементарное перемещение точки за промежуток времени Δt; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки; Δs — путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt.

- Среднее и мгновенное ускорения материальной точки

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

- Полное ускорение при криволинейном движении

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ — тангенциальная составляющая ускорения; $a_n = \frac{v^2}{r}$ — нормальная составляющая ускорения (r — радиус кривизны траектории в данной точке).

- Путь и скорость для равнопеременного движения

$$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2};$$

$$v = v_0 \pm at,$$

где v_0 — начальная скорость.

- Угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

- Угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

- Угловая скорость для равномерного вращательного движения

$$\omega=\frac{\varphi}{t}=\frac{2\pi}{T}=2\pi n,$$

где T — период вращения; n — частота вращения ($n=N/t$, где N — число оборотов, совершаемых телом за время t).

● Угол поворота и угловая скорость для равнопеременного вращательного движения

$$\varphi=\omega_0 t\pm\frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\omega=\omega_0\pm\varepsilon t,$$

где ω_0 — начальная угловая скорость.

● Связь между линейными и угловыми величинами:

$$s=R\varphi;\ v=R\omega;\ a_\tau=R\varepsilon;\ a_n=\omega^2 R,$$

где R — расстояние от оси вращения.

Примеры решения задач

Задача 1. С башни в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью $v_0=10$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить для момента времени $t=2$с после начала движения: 1) скорость тела; 2) радиус кривизны его траектории.

Дано: $v_0=10$ м/с, $t=2$с.

Определить: 1) v; 2) R.

Решение. Тело участвует в двух взаимно перпендикулярных движениях: равномерном прямолинейном движении вдоль оси Ox (со скоростью $\mathbf{v}_0$) и свободном падении вдоль оси Oy (со скоростью $v_y=gt$) (рис. 1). Следовательно, скорость тела в точке A

$$v=\sqrt{v_0^2+g^2t^2}.$$

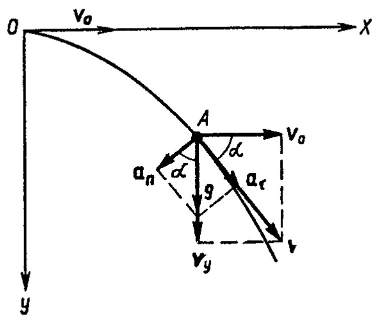


Рис. 1

Из рисунка видно, что нормальное ускорение тела

$$a_n=g\cos\alpha=\frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}.$$

С другой стороны, $a_n=v^2/R$, откуда

$$R=\frac{v^2}{a_n}=\frac{(v_0^2+g^2t^2)^{3/2}}{gv_0}.$$

Вычисляя, получаем:
1) $v=22$ м/с; 2) $R=109$ м.

Задача 2. Диск радиусом $R=5$ см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угловой скорости от времени задается уравнением $\omega=2At+5Bt^4$ ($A=2$ рад/с^2, $B=1$ рад/с^5). Определить для точек на ободе диска к концу первой секунды после начала движения: 1) полное ускорение; 2) число оборотов, сделанных диском.

Дано: $R=5$ см$=0,05$ м, $\omega=2At+5Bt^4$, $A=2$ рад/с^2, $B=1$ рад/с^5, $t=1$ с.

Определить: 1) a; 2) N.

Решение. Полное ускорение $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$, где тангенциальная составляющая ускорения $a_\tau=\varepsilon R$ $\left(\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}\right.$ — угловое ускорение$\left.\right)$, а нормальная составляющая ускорения $a_n=\omega^2R$.

По условию задачи, $\omega=2At+5Bt^4$; следовательно,

$$a_\tau=\varepsilon R=R\frac{d\omega}{dt}=R(2A+20Bt^3),$$

$$a_n=\omega^2R=R(2At+5Bt^4)^2,$$

откуда полное ускорение

$$a=R\sqrt{(2A+20Bt^3)^2+(2At+5Bt^4)^4}.$$

Угол поворота диска $\varphi=2\pi N$ (N — число оборотов), но угловая скорость $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$; следовательно,

$$\varphi=\int_0^t\omega\,dt=\int_0^t(2At+5Bt^4)dt=At^2+Bt^5.$$

Тогда число оборотов, сделанных диском,

$$N=\varphi/(2\pi)=\frac{At^2+Bt^5}{2\pi}.$$

Вычисляя, получим: 1) $a=4,22$ м/с^2; 2) $N=0,477$.

Задачи

1.1. Скорость течения реки $v=3$ км/ч, а скорость движения лодки относительно воды $v_1=6$ км/ч. Определить, под каким углом относительно берега должна двигаться лодка, чтобы проплыть поперек реки. [60°]

1.2. Капля дождя при скорости ветра $v_1=11$ м/с падает под углом $\alpha=30°$ к вертикали. Определить, при какой скорости ветра v_2 капля будет падать под углом $\beta=45°$. [19 м/с]

1.3. Два автомобиля, выехав одновременно из одного пункта, движутся прямолинейно в одном направлении. Зависимость пройденного ими пути задается уравнениями $s_1=At+Bt^2$ и $s_2=Ct+Dt^2+Ft^3$. Определить относительную скорость u автомобилей. [$u=A-C+$ $+2(B-D)t-3Ft^2$]

1.4. Велосипедист проехал первую половину времени своего движения со скоростью $v_1=16$ км/ч, вторую половину времени — со скоростью $v_2=12$ км/ч. Определить среднюю скорость движения велосипедиста. [14 км/ч]

1.5. Велосипедист проехал первую половину пути со скоростью $v_1=16$ км/ч, вторую половину пути — со скоростью $v_2=12$ км/ч. Определить среднюю скорость движения велосипедиста. [13,7 км/ч].

1.6. Студент проехал половину пути на велосипеде со скоростью $v_1=16$ км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $v_2=12$ км/ч, а затем до конца пути шел пешком со скоростью $v_3=5$ км/ч. Определить среднюю скорость движения студента на всем пути. [$\langle v\rangle=11,1$ км/ч]

1.7. В течение времени τ скорость тела задается уравнением вида $v=A+Bt+Ct^2$ $(0\leqslant t\leqslant\tau)$. Определить среднюю скорость за промежуток времени τ. $\left[\langle v\rangle= =A+\frac{B\tau}{2}+\frac{C\tau^2}{3}\right]$

1.8. При падении камня в колодец его удар о поверхность воды доносится через $t=5$ с. Принимая скорость звука $v=330$ м/с, определить глубину колодца. [109 м]

1.9. Тело падает с высоты $h=1$ км с нулевой начальной скоростью. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, какой путь пройдет тело: 1) за первую секунду своего падения; 2) за последнюю секунду своего падения. [1) 4,9 м; 2) 132 м]

1.10. Тело падает с высоты $h=1$ км с нулевой начальной скоростью. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, какое время понадобится телу для прохождения: 1) первых 10 м своего пути; 2) последних 10 м своего пути. [1) 1,43 с; 2) 0,1 с]

1.11. Первое тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=5$ м/с. В тот же момент времени вертикально вниз с той же начальной скоростью из точки, соответствующей максимальной верхней точке полета h_{max} первого тела, брошено второе тело. Определить: 1) в какой момент времени t тела встретятся; 2) на какой высоте h от поверхности Земли произойдет эта встреча; 3) скорость v_1 первого тела в момент встречи; 4) скорость v_2 второго тела в момент встречи. [1) 127 мс; 2) 56 см, 3) 3,75 м/с; 4) 6,25 м/с]

1.12. Тело брошено под углом к горизонту. Оказалось, что максимальная высота подъема $h={}^1/_4s$ (s — дальность полета). Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить угол броска к горизонту. (45°)

1.13. Тело брошено со скоростью $v_0=15$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) высоту h подъема тела; 2) дальность полета (по горизонтали) s тела; 3) время его движения. [1) 2,87 м; 2) 19,9 м; 3) 1,53 с]

1.14. Тело брошено со скоростью $v_0=20$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить для момента времени $t=1,5$ с после начала движения: 1) нормальное ускорение; 2) тангенциальное ускорение. [1) 9,47 м/с^2; 2) 2,58 м/с^2]

1.15. С башни высотой $H=40$ м брошено тело со скоростью $v_0=20$ м/с под углом $\alpha=45°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) время t движения тела; 2) на каком расстоянии s от основания башни тело упадет на Землю; 3) скорость v падения тела на Землю; 4) угол φ, который составит траектория тела с горизонтом в точке его падения. [1) 4,64 с; 2) 65,7 м; 3) 34,4 м/с; 4) 65,7°]

1.16. Тело брошено горизонтально со скоростью $v_0=15$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить радиус кривизны траектории тела через $t=2$ с после начала движения. [102 м]

1.17. С башни высотой $h=30$ м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью $v_0=$ $=10$ м/с. Определить: 1) уравнение траектории тела $y(x)$; 2) скорость v тела в момент падения на Землю; 3) угол φ, который образует эта скорость с горизонтом в точке его падения. $\left[1)\ y=\frac{g}{2v_0^2}x^2;\ \ 2)\ 26,2\ \text{м/с};\ \ 3)\ 67,8°\right]$

1.18. Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением $s=A-Bt+Ct^2+Dt^3$ ($A=6$ м; $B=3$ м/с, $C=2$ м/с^2, $D=1$ м/с^3). Определить для тела в интервале времени от $t_1=1$ с до $t_2=4$ с: 1) среднюю скорость; 2) среднее ускорение. [1) 28 м/с; 2) 19 м/с^2]

1.19. Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($C = 0{,}1$ м/с^2, $D = 0{,}03$ м/с^3). Определить: 1) через сколько времени после начала движения ускорение a тела будет равно 2 м/с^2; 2) среднее ускорение $\langle a \rangle$ тела за этот промежуток времени. [1) 10 с; 2) 1,1 м/с^2]

1.20. Объяснить, может ли меняться направление вектора скорости, в то время как его ускорение по модулю остается постоянным.

1.21. Тело движется равноускоренно с начальной скоростью v_0. Определить ускорение тела, если за время $t = 2$ с оно прошло путь $s = 16$ м и его скорость $v = 3v_0$. [4 м/с^2]

1.22. Материальная точка движется вдоль прямой так, что ее ускорение линейно растет и за первые 10 с достигает значения 5 м/с^2. Определить в конце десятой секунды: 1) скорость точки; 2) пройденный точкой путь. [1) 25 м/с; 2) 83,3 м]

1.23. Кинематические уравнения движения двух материальных точек имеют вид $x_1 = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3$ и $x_2 = A_2t + B_2t^2 + C_2t^3$, где $B_1 = 4$ м/с^2, $C_1 = -3$ м/с^3, $B_2 = -2$ м/с^2, $C_2 = 1$ м/с^3. Определить момент времени, для которого ускорения этих точек будут равны. [0,5 с]

1.24. Кинематические уравнения движения двух материальных точек имеют вид $x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$ и $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$, где $C_1 = -2$ м/с^2, $C_2 = 1$ м/с^2. Определить: 1) момент времени, для которого скорости этих точек будут равны; 2) ускорения a_1 и a_2 для этого момента. [1) 0; 2) $a_1 = -4$ м/с^2, $a_2 = 2$ м/с^2]

1.25. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом $r = 4$ м, задается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$ ($A = 1$ м/с^2, $B = 6$ м/с^3, $C = 9$ м/с^4). Определить: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время $t_1 = 5$ с после начала движения; 3) полное ускорение для момента времени $t_2 = 1$ с. [1) 6 м/с^2; 2) 85 м; 3) 6,32 м/с^2]

1.26. Зависимость пройденного телом пути s от времени t выражается уравнением $s = At - Bt^2 + Ct^3$ ($A = 2$ м/с, $B = 3$ м/с^2, $C = 4$ м/с^3). Записать выражения для скорости и ускорения. Определить для момента времени $t = 2$ с после начала движения: 1) пройденный путь; 2) скорость; 3) ускорение. [1) 24 м; 2) 38 м/с; 3) 42 м/с^2]

1.27. Зависимость пройденного телом пути по окружности радиусом $r = 3$ м задается уравнением $s = At^2 + Bt$ ($A = 0{,}4$ м/с^2, $B = 0{,}1$ м/с). Определить для момента времени $t = 1$ с после начала движения ускорения: 1) нормальное; 2) тангенциальное; 3) полное. [1) 0,27 м/с^2; 2) 0,8 м/с^2; 3) 0,84 м/с^2]

1.28. Точка движется в плоскости xy из положения с координатами $x = y = 0$ со скоростью $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$ (a, b — постоянные; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ — орты осей x и y). Определить: 1) уравнение траектории точки $y(x)$; 2) форму траектории. $\left[1)\ y = \frac{b}{2a}x^2;\ 2)\ \text{парабола}\right]$

1.29. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ — орты осей x и y. Определить для момента времени $t = 1$ с: 1) модуль скорости; 2) модуль ускорения. [1) 6,7 м/с; 2) 8,48 м/с^2]

1.30. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\mathbf{r} = 4t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Определить: 1) скорость $\mathbf{v}$; 2) ускорение $\mathbf{a}$; 3) модуль скорости в момент времени $t = 2$ с. [3) 16,3 м/с]

1.31. Движение материальной точки в плоскости xy описывается законом $x = At$, $y = At(1 + Bt)$, где A и B — положительные постоянные. Определить: 1) уравнение траектории материальной точки $y(x)$; 2) радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки в зависимости от времени; 3) скорость v точки в зависимости от времени; 4) ускорение a точки в зависимости от времени. [1) $y = x + Bx^2/A$; 2) $\mathbf{r} = At\mathbf{i} + At(1 + Bt)\mathbf{j}$; 3) $v = A\sqrt{1 + (1 + 2Bt)^2}$; 4) $a = 2AB = \text{const}$]

1.32. Материальная точка начинает двигаться по окружности радиусом $r = 12{,}5$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0{,}5$ см/с^2. Определить: 1) момент времени, при котором вектор ускорения $\mathbf{a}$ образует с вектором скорости $\mathbf{v}$ угол $\alpha = 45°$; 2) путь, пройденный за это время движущейся точкой. [1) 5 с; 2) 6,25 см]

1.33. Линейная скорость v_1 точки, находящейся на ободе вращающегося диска, в три раза больше, чем линейная скорость v_2 точки, находящейся на 6 см ближе к его оси. Определить радиус диска. [9 см]

1.34. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2. Определить радиус колеса, если через $t = 1$ с после начала движения полное ускорение колеса $a = 7{,}5$ м/с^2. [79 см]

1.35. Якорь электродвигателя, имеющий частоту вращения

$n=50$ с$^{-1}$, после выключения тока, сделав $N=628$ оборотов, остановился. Определить угловое ускорение ε якоря. [12,5 рад/с^2]

1.36. Колесо автомашины вращается равнозамедленно. За время $t=2$ мин оно изменило частоту вращения от 240 до 60 мин$^{-1}$. Определить: 1) угловое ускорение колеса; 2) число полных оборотов, сделанных колесом за это время. [1) 0,157 рад/с^2; 2) 300]

1.37. Точка движется по окружности радиусом $R=15$ см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. К концу четвертого оборота после начала движения линейная скорость точки $v=15$ см/с. Определить нормальное ускорение a_n точки через $t=16$ с после начала движения. [1,5 см/с^2]

1.38. Диск радиусом $R=10$ см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi=A+Bt+Ct^2+Dt^3$ ($B=1$ рад/с, $C=1$ рад/с^2, $D=1$ рад/с^3). Определить для точек на ободе диска к концу второй секунды после начала движения: 1) тангенциальное ускорение a_τ; 2) нормальное ускорение a_n; 3) полное ускорение a. [1) 1,4 м/с^2; 2) 28,9 м/с^2; 3) 28,9 м/с^2]

1.39. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi=At^2$ ($A=0,5$ рад/с^2). Определить к концу второй секунды после начала движения: 1) угловую скорость диска; 2) угловое ускорение диска; 3) для точки, находящейся на расстоянии 80 см от оси вращения, тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения. [1) 2 рад/с; 2) 1 рад/с^2; 3) $a_\tau=0,8$ м/с^2, $a_n=3,2$ м/с^2, $a=3,3$ м/с^2]

1.40. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi=At^2$ ($A=0,1$ рад/с^2). Определить полное ускорение a точки на ободе диска к концу второй секунды после начала движения, если линейная скорость этой точки в этот момент $v=0,4$ м/с. [0,26 м/с^2]

1.41. Диск радиусом $R=10$ см вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе диска, от времени задается уравнением $v=At+Bt^2$ ($A=0,3$ м/с^2, $B=0,1$ м/с^3). Определить момент времени, для которого вектор полного ускорения **a** образует с радиусом колеса угол $\varphi=4°$. [2 с]

1.42. Диск радиусом $R=10$ см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi=A+Bt^3$ ($A=2$ рад, $B=4$ рад/с^3). Определить для точек на ободе колеса: 1) нормальное ускорение a_n в момент времени $t=2$ с; 2) тангенциальное ускорение для этого же момента; 3) угол поворота φ, при котором полное ускорение составляет с радиусом колеса угол $\alpha=45°$. [1) 230 м/с^2; 2) 4,8 м/с^2; 3) 2,67 рад]

1.2. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела

Основные законы и формулы

- Импульс (количество движения) материальной точки

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}.$$

- Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки)

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

- Это же уравнение в проекциях на касательную и нормаль к траектории точки

$$F_\tau=ma_\tau=m\frac{dv}{dt};\quad F_n=ma_n=\frac{mv^2}{R}=m\omega^2R.$$

- Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}}=fN,$$

где f — коэффициент трения скольжения; N — сила нормального давления.

- Сила трения качения

$$F_{\text{тр}}=f_{\text{к}}N/r,$$

где $f_{\text{к}}$ — коэффициент трения качения; r — радиус катящегося тела.

- Закон сохранения импульса для замкнутой системы

$$\mathbf{p}=\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}_i=\text{const},$$

где n — число материальных точек (или тел), входящих в систему.

- Координаты центра масс системы материальных точек:

$$x_C=\frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i};\quad y_C=\frac{\sum m_iy_i}{\sum m_i},\quad z_C=\frac{\sum m_iz_i}{\sum m_i},$$

где m_i — масса i-й материальной точки; x_C, y_C, z_C — ее координаты.

● Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского)

$$m\mathbf{a}=\mathbf{F}+\mathbf{F}_p,$$

где реактивная сила $\mathbf{F}_p=-\mathbf{u}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ ($\mathbf{u}$ — скорость истечения газов из ракеты).

● Формула Циолковского для определения скорости ракеты

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}\ln\frac{m_0}{m},$$

где m_0 — начальная масса ракеты.

Примеры решения задач

Задача 3. Через блок, укрепленный на конце стола, перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы, один из которых ($m_1=400$ г) движется по поверхности стола, а другой ($m_2=600$ г) — вдоль вертикали вниз. Коэффициент f трения груза о стол равен 0,1. Считая нить и блок невесомыми, определить: 1) ускорение a, с которым движутся грузы; 2) силу натяжения T нити.

Дано: $m_1=400$ г $=0,4$ кг, $m_2=600$ г $=0,6$ кг, $f=0,1$.

Определить: 1) a; 2) T.

Решение. Выбрав оси координат (рис. 2), запишем для каждого груза уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекциях на эти оси:

$$m_1a=T-F_{тр},$$
$$m_2a=m_2g-T.$$

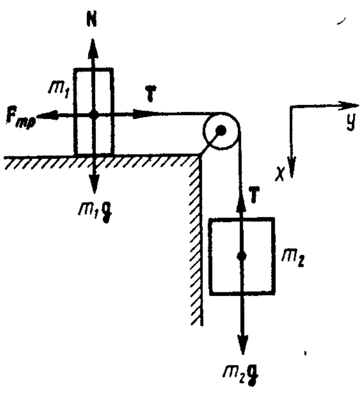


Рис. 2

Учитывая, что $F_{тр}=fm_1g$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} m_1a=T-fm_1g, \\ m_2a=m_2g-T, \end{cases}$$

откуда искомое ускорение

$$a=\frac{(m_2-fm_1)g}{m_1+m_2}.$$

Силу натяжения нити найдем из второго уравнения системы:

$$T=m_2(g-a).$$

Вычисляя, получим: 1) $a=5,49$ м/с^2; 2) $T=2,59$ Н.

Задача 4. Ракета с начальной массой $M=500$ г выбрасывает непрерывную струю газов с постоянной относительно нее скоростью $u=400$ м/с. Расход газа $\mu=150$ г/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха и внешним силовым полем, определить, какую скорость относительно Земли приобретет ракета через время $t=2$ с после начала движения, если ее начальная скорость равна нулю?

Дано: $M=500$ г $=0,5$ кг, $u=400$ м/с, $\mu=150$ г/с $=0,15$ кг/с, $t=2$ с, $v_0=0$.

Определить v.

Решение. Из условия задачи следует, что внешние силы отсутствуют, поэтому импульс системы тел ракета — выбрасываемый газ остается постоянным. Начальная скорость ракеты равна нулю, поэтому движение ракеты будет прямолинейным. Направив ось x по скорости ракеты $\mathbf{v}$, в проекциях на эту ось можем записать

$$(M-\mu t)\mathrm{d}v-\mu u\,\mathrm{d}t=0,$$

где $\mathrm{d}v$ — изменение скорости ракеты (за счет реактивного действия выбрасываемой струи газа) за промежуток времени $\mathrm{d}t$. Отсюда

$$\mathrm{d}v=\frac{\mu u}{M-\mu t}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Скорость v как функцию времени найдем интегрируя выражение (1) в пределах от 0 до t. При $t=0$ $v=0$; следовательно,

$$v=u\int_0^t\frac{\mu\,\mathrm{d}t}{M-\mu t},$$

откуда

$$v=u\ln\frac{M}{M-\mu t}.$$

Вычисляя, получаем $v=366$ м/с.

Задачи

1.43. Тело массой $m=2$ кг движется прямолинейно по закону $s=A-Bt+Ct^2-Dt^3$ ($C=2$ м/с^2, $D=0,4$ м/с^3). Определить силу, действующую на тело в конце первой секунды движения. [3,2 Н]

1.44. Тело массой m движется так, что зависимость прой-

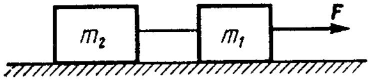


Рис. 3

денного пути от времени описывается уравнением $s = A\cos\omega t$, где A и ω — постоянные. Записать закон изменения силы от времени. $[F = -mA\omega^2\cos\omega t]$

1.45. К нити подвешен груз массой $m = 500$ г. Определить силу натяжения нити, если нить с грузом: 1) поднимать с ускорением 2 м/с^2; 2) опускать с ускорением 2 м/с^2. [1) 5,9 Н, 2) 3,9 Н]

1.46. Два груза ($m_1 = 500$ г и $m_2 = 700$ г) связаны невесомой нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности (рис. 3). К грузу m_1 приложена горизонтально направленная сила $F = 6$ Н. Пренебрегая трением, определить: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити [1) 5 м/с^2; 2) 3,5 Н]

1.47. Простейшая машина Атвуда, применяемая для изучения законов равноускоренного движения, представляет собой два груза с не равными массами m_1 и m_2 (например, $m_1 > m_2$), которые подвешены на легкой нити, перекинутой через неподвижный блок (рис. 4). Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая трением в оси блока, определить: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити T; 3) силу F, действующую на ось блока. $\left[1)\ a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g;\ 2)\ T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2};\ 3)\ F = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \right]$

1.48. На рис. 5 изображена система блоков, к которым подвешены грузы массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 500$ г. Считая, что груз m_1 поднимается, а неподвижный блок с m_2 опускается, нить и блоки невесомы, силы трения отсутствуют, определить: 1) силу натяжения нити T; 2) ускорения, с которыми движутся грузы. [1) 2,26 Н; 2) $a_1 = 1{,}5$ м/с^2, $a_2 = 0{,}75$ м/с^2]

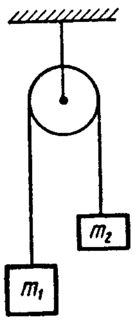


Рис. 4

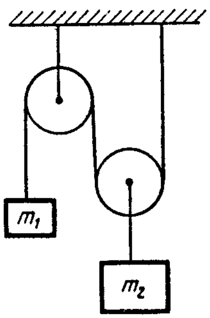


Рис. 5

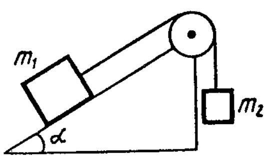


Рис. 6

1.49. В установке (рис. 6) угол α наклонной плоскости с горизонтом равен 20°, массы тел $m_1 = 200$ г и $m_2 = 150$ г. Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая силами трения, определить ускорение, с которым будут двигаться эти тела, если тело m_2 опускается. [2,29 м/с^2]

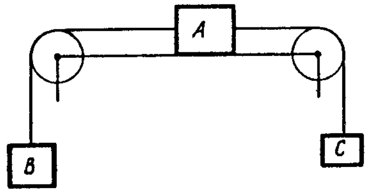


Рис. 7

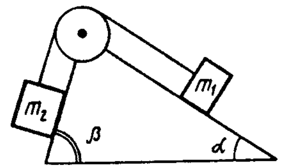


Рис. 8

1.50 Тело A массой $M = 2$ кг (рис. 7) находится на горизонтальном столе и соединено нитями посредством блоков с телами B ($m_1 = 0{,}5$ кг) и C ($m_2 = 0{,}3$ кг). Считая нити и блоки невесомыми и пренебрегая силами трения, определить: 1) ускорение, с которым будут двигаться эти тела; 2) разность сил натяжения нитей. [1) 0,78 м/с^2; 2) 1,33 Н]

1.51. В установке (рис. 8) углы α и β с горизонтом соответственно равны 30 и 45°, массы тел $m_1 = 0{,}45$ кг и $m_2 = 0{,}5$ кг. Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая силами трения, определить: 1) ускорение, с которым движутся тела; 2) силу натяжения нити. [1) 1,33 м/с^2; 2) 2,8 Н]

1.52. Тело массой m движется в плоскости xy по закону $x = A\cos\omega t$, $y = B\sin\omega t$, где A, B и ω — некоторые постоянные. Определить модуль силы, действующей на это тело. $[F = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}]$

1.53. Частица массой m движется под действием силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \cos\omega t$, где $\mathbf{F}_0$ и ω — некоторые постоянные. Определить положение частицы, т. е. выразить ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ как функцию времени, если в начальный момент времени $t = 0$, $\mathbf{r}(0) = 0$ и $\mathbf{v}(0) = 0$. $\left[\mathbf{r}(t) = (1 - \cos\omega t)\frac{\mathbf{F}_0}{m\omega_0^2} \right]$

1.54. На тело (рис. 9) массой $m=10$ кг, лежащее на наклонной плоскости (угол α равен 20°), действует горизонтально направленная сила $F=8$ Н. Пренебрегая трением, определить: 1) ускорение тела; 2) силу, с которой тело давит на плоскость. [1) 4,11 м/с^2; 2) 89,4 Н]

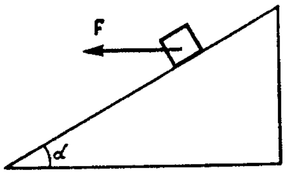


Рис. 9

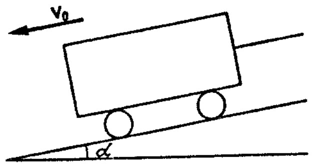


Рис. 10

1.55. Тело массой $m=2$ кг падает вертикально с ускорением $a=5$ м/с^2. Определить силу сопротивления при движении этого тела. [9,62 Н]

1.56. С вершины клина, длина которого $l=2$ м и высота $h=1$ м, начинает скользить небольшое тело. Коэффициент трения между телом и клином $f=0{,}15$. Определить: 1) ускорение, с которым движется тело; 2) время прохождения тела вдоль клина; 3) скорость тела у основания клина. [1) 3,63 м/с^2; 2) 1,05 с; 3) 3,81 м/с]

1.57. По наклонной плоскости с углом α наклона к горизонту, равным 30°, скользит тело. Определить скорость тела в конце второй секунды от начала скольжения, если коэффициент трения $f=0{,}15$. [7,26 м/с]

1.58. Вагон массой $m=1$ т спускается по канатной железной дороге с уклоном $\alpha=15°$ к горизонту (рис. 10). Принимая коэффициент трения $f=0{,}05$, определить

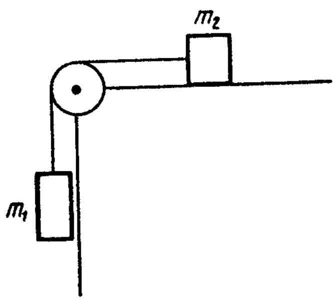


Рис. 11

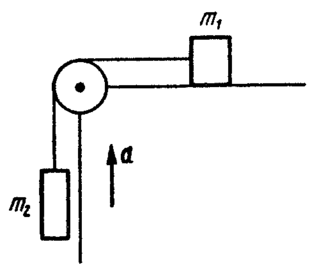


Рис. 12

силу натяжения каната при торможении вагона в конце спуска, если скорость вагона перед торможением $v_0=2{,}5$ м/с, а время торможения $t=6$ с. [2,48 кН]

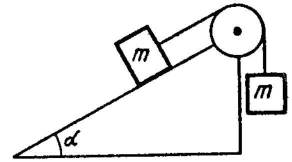


Рис. 13

1.59 Грузы одинаковой массой ($m_1=m_2=0{,}5$ кг) соединены нитью и перекинуты через невесомый блок, укрепленный на конце стола (рис. 11). Коэффициент трения груза m_2 о стол $f=0{,}15$. Пренебрегая трением в блоке, определить: 1) ускорение, с которым движутся грузы; 2) силу натяжения нити. [1) 4,17 м/с^2; 2) 2,82 Н].

1.60. Система грузов (рис. 12) массами $m_1=0{,}5$ кг и $m_2=0{,}6$ кг находится в лифте, движущемся вверх с ускорением $a=4{,}9$ м/с^2. Определить силу натяжения нити, если коэффициент трения между грузом массы m_1 и опорой $f=0{,}1$. $\left[T=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1+f)(a+g)=4{,}41\text{ Н}\right]$

1.61. На горизонтальной поверхности находится доска массой m_2, на которой лежит брусок массой m_1. Коэффициент трения бруска о поверхность доски равен f. К доске приложена горизонтальная сила F, зависящая от времени по закону $F=At$, где A — некоторая постоянная. Определить: 1) момент времени t_0, когда доска начнет выскальзывать из-под бруска; 2) ускорения бруска a_1 и доски a_2. [1) $t_0=(m_1+m_2)fg/A$; 2) при $t\leqslant t_0$ $a_1=a_2=At/(m_1+m_2)$; при $t\geqslant t_0$ $a_1=fg=\text{const}$, $a_2=(At-fm_1g)/m_2$]

1.62. В установке (рис. 13) угол α наклона плоскости с горизонтом равен 30°, массы тел одинаковы ($m=1$ кг). Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая трением в оси блока, определить силу давления на ось, если коэффициент трения между наклонной плоскостью и лежащим на ней телом $f=0{,}1$. $\left[F=mg(1+f\cos\alpha+\sin\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=13{,}5\text{ Н}\right]$

1.63. На наклонную плоскость с углом наклона к горизонту $\alpha=35°$ положена доска массой $m_2=2$ кг, а на доску — брусок массой $m_1=1$ кг. Коэффициент трения между бруском и доской $f_1=0{,}1$, а между доской и плоскостью $f_2=0{,}2$. Определить: 1) ускорение бруска; 2) ускорение доски; 3) коэффициент трения f_2, при котором доска не будет двигаться. $\big[$ 1) $a_1=g(\sin\alpha-f_1\cos\alpha)=$

$= 4{,}82$ м/с^2; 2) $a_2 = g\{\sin\alpha + f_1(m_1/m_2)\cos\alpha - f_2[(m_1 + m_2)/m_2]\cos\alpha\} = 3{,}62$ м/с^2;

3) $f_2 \geqslant \frac{m_2[\sin\alpha + f_1(m_1/m_2)\cos\alpha}{(m_1+m_2)\cos\alpha} \geqslant 0{,}5$]

1.64. Снаряд массой $m = 5$ кг, вылетевший из орудия, в верхней точке траектории имеет скорость $v = 300$ м/с. В этой точке он разорвался на два осколка, причем больший осколок массой $m_1 = 3$ кг полетел в обратном направлении со скоростью $v_1 = 100$ м/с. Определить скорость v_2 второго, меньшего, осколка. [900 м/с]

1.65. Лодка массой $M = 150$ кг и длиной $l = 2{,}8$ м стоит неподвижно в стоячей воде. Рыбак массой $m = 90$ кг в лодке переходит с носа на корму. Пренебрегая сопротивлением воды, определить, на какое расстояние s при этом сдвинется лодка. [1,05 м]

1.66. Снаряд, вылетевший из орудия со скоростью v_0, разрывается на два одинаковых осколка в верхней точке траектории на расстоянии l (по горизонтали). Один из осколков полетел в обратном направлении со скоростью движения снаряда до разрыва. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на каком расстоянии (по горизонтали) от орудия упадет второй осколок. [$s = 4l$]

1.67. Платформа с песком общей массой $M = 2$ т стоит на рельсах на горизонтальном участке пути. В песок попадает снаряд массой $m = 8$ кг и застревает в нем. Пренебрегая трением, определить, с какой скоростью будет двигаться платформа, если в момент попадания скорость снаряда $v = 450$ м/с, а ее направление — сверху вниз под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. [1,55 м/с]

1.68. На железнодорожной платформе, движущейся по инерции со скоростью $v_0 = 3$ км/ч, укреплено орудие. Масса платформы с орудием $M = 10$ т. Ствол орудия направлен в сторону движения платформы. Снаряд массой $m = 10$ кг вылетает из ствола под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Определить скорость v снаряда (относительно Земли), если после выстрела скорость платформы уменьшилась в $n = 2$ раза. [835 м/с]

1.69. Две легкие тележки (массы соответственно m_1 и $m_2 = 2m_1$) соединены между собой сжатой, связанной нитью пружиной. Пережигая нить, пружина распрямляется и тележки разъезжаются в разные стороны. Считая коэффициент трения для обеих тележек одинаковым, определить: 1) v_1/v_2 — отношение скоростей движения тележек; 2) t_1/t_2 — отношение времен, в течение которых тележки движутся; 3) s_1/s_2 — отношение путей, пройденных тележками. [1) 2; 2) 2; 3) 4]

1.70. Две одинаковые тележки массой M каждая движутся по инерции (без трения) друг за другом с одинаковой скоростью $\mathbf{v}_0$. В какой-то момент времени человек массой m, находящийся на задней тележке, прыгнул в переднюю со скоростью $\mathbf{u}$ относительно своей тележки. Определить скорость $\mathbf{v}_1$ передней тележки.

$$\left[\ \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \frac{mM}{(m+M)^2}\mathbf{u}\ \right]$$

1.71. Определить положение центра масс системы, состоящей из четырех шаров, массы которых равны соответственно m, $2m$, $3m$ и $4m$, в следующих случаях (рис. 14): а) шары расположены на одной прямой;

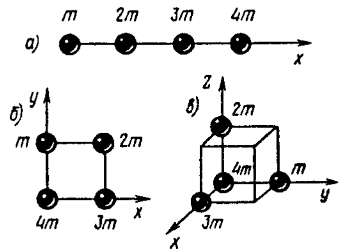


Рис. 14

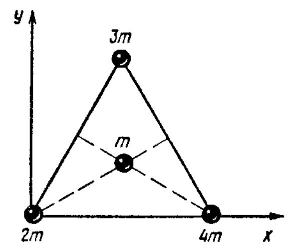


Рис. 15

б) шары расположены по вершинам квадрата; в) шары расположены по четырем смежным вершинам куба. Во всех случаях расстояние между соседними шарами равно 15 см. Направление координатных осей показано на рисунке. [а) $x_C = 30$ см; б) $x_C = 7{,}5$ см, $y_C = 4{,}5$ см; в) $x_C = 1{,}5$ см, $y_C = 4{,}5$ см, $z_C = 3$ см]

1.72. Определить положение центра масс половины круглого диска радиусом R, считая его однородным. [На расстоянии $4R/(3\pi)$ от центра]

1.73. Определить координаты центра масс системы, состоящей из четырех шаров массами $2m$, $3m$, $4m$ и m, которые расположены в вершинах и в центре равностороннего треугольника со стороной $a = 20$ см (рис. 15). Направление координатных осей указано на рисунке. [$x_C = 12$ см, $y_C = 5{,}77$ см]

1.74. Нагруженная песком железнодорожная платформа с начальной массой m_0 начинает движение из состояния покоя под действием постоянной силы тяги **F**. Через отверстие в дне платформы высыпается песок с постоянной скоростью μ кг/с. Определить $\mathbf{v}(t)$, т. е. зависимость скорости платформы от времени $\left[\mathbf{v}=\frac{\mathbf{F}}{\mu}\ln\frac{m_0}{m_0-\mu t}\right]$

1.75. На катере массой $m=4{,}5$ т находится водомет, выбрасывающий со скоростью $u=6$ м/с относительно катера назад $\mu=25$ кг/с воды. Пренебрегая сопротивлением движению катера, определить: 1) скорость катера через $t=3$ мин после начала движения; 2) предельно возможную скорость катера. [1) 3,8 м/с; 2) 6 м/с]

1.76. Ракета, масса которой в начальный момент времени $M=2$ кг, запущена вертикально вверх. Относительная скорость выхода продуктов сгорания $u=150$ м/с, расход горючего $\mu=0{,}2$ кг/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить ускорение a ракеты через $t=3$ с после начала ее движения. Поле силы тяжести считать однородным. [11,6 м/с^2]

1.77. Ракета, масса которой в начальный момент $M=300$ г, начинает выбрасывать продукты сгорания с относительной скоростью $u=200$ м/с. Расход горючего $\mu=100$ г/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха и внешним силовым полем, определить: 1) за какой промежуток времени скорость ракеты станет равной $v_1=50$ м/с; 2) скорость v_2, которую достигнет ракета, если масса заряда $m_0=0{,}2$ кг. [1) 0,66 с; 2) 220 м/с]

1.78. Ракета с начальной массой m_0, начиная движение из состояния покоя, к некоторому моменту времени t израсходовав топливо массой m, развивает скорость v. Пренебрегая сопротивлением воздуха и внешним силовым полем, определить зависимость v от m, если скорость истечения топлива относительно ракеты равна u. $[v=u\ln(m_0/(m_0-m))]$

1.79. Ракета поднимается с нулевой начальной скоростью вертикально вверх. Начальная масса ракеты m_0, скорость истечения газа относительно ракеты постоянна и равна u. Пренебрегая сопротивлением воздуха, выразить скорость ракеты v в зависимости от m и t (m — масса ракеты; t — время ее подъема). Поле силы тяжести считать однородным. $[v=u\ln(m_0/m)-gt]$

1.80. Ракета с начальной массой $m_0=1{,}5$ кг, начиная движение из состояния покоя вертикально вверх, выбрасывает непрерывную струю газов с постоянной относительно нее скоростью $u=800$ м/с. Расход газа $\mu=0{,}3$ кг/с. Определить, какую скорость приобретает ракета через время $t=1$ с после начала движения, если она движется: 1) при отсутствии внешних сил; 2) в однородном поле силы тяжести; 3) оценить относительную погрешность, сделанную для данных условий задачи при пренебрежении внешним силовым полем. [1) $v=u\ln[m_0/(m_0-\mu t)]=134$ м/с; 2) $v_1=u\ln[m_0/(m_0-\mu t)]-gt=124$ м/с. 3) 7,5 %]

1.3. Работа и энергия

Основные законы и формулы

- Работа, совершаемая постоянной силой,

$$dA=F_s ds=F ds\cos\alpha,$$

где F_s — проекция силы на направление перемещения; α — угол между направлениями силы и перемещения.

- Работа, совершаемая переменной силой, на пути s

$$A=\int_s F_s ds=\int_s F\cos\alpha\, ds.$$

- Средняя мощность за промежуток времени Δt

$$\langle N\rangle=\Delta A/\Delta t.$$

- Мгновенная мощность

$$N=\frac{dA}{dt},\text{ или } N=\mathbf{F}\mathbf{v}=F_s v=Fv\cos\alpha.$$

- Кинетическая энергия движущего тела

$$T=mv^2/2.$$

- Связь между силой, действующей на тело в данной точке поля, и потенциальной энергией частицы

$$\mathbf{F}=-\operatorname{grad}\Pi,\text{ или }\mathbf{F}=-\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\Pi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\Pi}{\partial z}\mathbf{k}\right),$$

где **i**, **j**, **k** — единичные векторы координатных осей.

- Потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли на высоту h,

$$\Pi=mgh,$$

где g — ускорение свободного падения.

- Сила упругости

$$F = -kx,$$

где x — деформация; k — коэффициент упругости.

● Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi = kx^2/2.$$

● Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы)

$$T + \Pi = E = \text{const}$$

● Коэффициент восстановления

$$\varepsilon = v_n'/v_n,$$

где v_n' и v_n — соответственно нормальные составляющие относительной скорости тел после и до удара.

● Скорости двух тел массами m_1 и m_2 после абсолютно упругого центрального удара

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2},$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2},$$

где v_1 и v_2 — скорости тел до удара.

● Скорость движения тел после абсолютно неупругого центрального удара

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Примеры решения задач

Задача 5. Груз массой $m = 80$ кг поднимают вдоль наклонной плоскости с ускорением $a = 1$ м/с^2. Длина наклонной плоскости $l = 3$ м, угол α ее наклона к горизонту равен 30°, а коэффициент трения $f = 0{,}15$. Определить: 1) работу, совершаемую подъемным устройством; 2) его среднюю мощность; 3) его максимальную мощность. Начальная скорость груза равна нулю.

Дано: $m = 80$ кг, $a = 1$ м/с^2, $l = 3$ м, $\alpha = 30°$, $f = 0{,}15$.

Определить: 1) A; 2) $\langle P \rangle$; 3) P_{max}.

Решение. Уравнение движения груза в векторной форме

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{тр} + \mathbf{N}.$$

В проекциях на оси x и y (рис. 16) это уравнение примет вид

$$ma = F - F_1 - F_{тр},$$

$$0 = N - F_2,$$

где $F_1 = mg\sin\alpha$, $F_2 = mg\cos\alpha$, $F_{тр} = fN = fmg\cos\alpha$.

Поэтому

$$F = m(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha).$$

Работа, совершаемая подъемным устройством,

$$A = Fl = ml(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha).$$

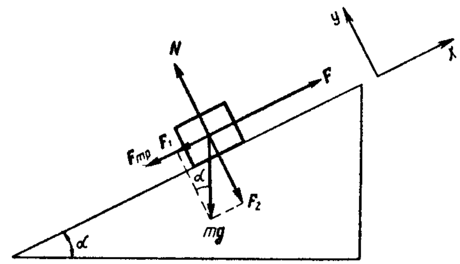


Рис. 16

Средняя мощность, развиваемая подъемным устройством,

$$\langle P \rangle = A/t,$$

где $t = \sqrt{2l/a}$ — время подъема груза. Следовательно,

$$P\rangle = A\sqrt{a/(2l)}.$$

Максимальная мощность, развиваемая подъемным устройством,

$$P_{max} = Fv_{max} = Fat.$$

Подставляя значения, получим

$$P_{max} = m\sqrt{2al}(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha).$$

Вычисляя, получим: 1) $A = 1{,}72$ кДж; 2) $\langle P \rangle = 702$ Вт; 3) $P_{max} = 1{,}41$ кВт.

Задача 6. Два свинцовых шара массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг подвешены на нитях длиной $l = 70$ см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол $\alpha = 60°$ и отпустили (рис. 17). Считая удар центральным и неупругим, определить: 1) высоту h, на которую поднимутся шары после удара; 2) энергию ΔT, израсходованную на деформацию шаров при ударе.

Дано: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 3$ кг, $h = 70$ см $= 0{,}7$ м, $\alpha = 60°$.

Определить: 1) h; 2) ΔT.

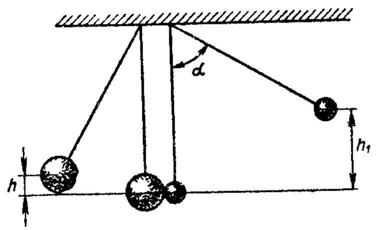


Рис. 17

Решение. Удар неупругий, поэтому после удара шары движутся с общей скоростью v, которую найдем из закона сохранения импульса:

$$m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v, \qquad (1)$$

где v_1 и v_2 — скорости шаров до удара. Скорость v_1 малого шара найдем из закона сохранения механической энергии:

$$m_1gh_1=m_1v_1^2/2,$$

откуда

$$v_1=\sqrt{2gh_1}=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}=2\sqrt{gl}\sin(\alpha/2) \qquad (2)$$

(учли, что $h_1=l(1-\cos\alpha)$).

Из выражений (1) и (2) при условии, что $v_2=0$, получим

$$v=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}=\frac{2m_1\sqrt{gl}\sin(\alpha/2)}{m_1+m_2}. \qquad (3)$$

Из закона сохранения механической энергии имеем

$$(m_1+m_2)\frac{v^2}{2}=(m_1+m_2)gh,$$

откуда искомая высота

$$h=\frac{v^2}{g}=\frac{2m_1^2l\sin^2(\alpha/2)}{(m_1+m_2)^2}$$

(учли формулу (3)).

Энергия, израсходованная на деформацию шаров при ударе,

$$\Delta T=\frac{m_1v_1^2}{2}-\frac{(m_1+m_2)}{2}v^2, \qquad (4)$$

или, подставив (2) в (4), получим

$$\Delta T=2gl\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\sin^2(\alpha/2).$$

Вычисляя, получим: 1) $h=5{,}6$ см; 2) $\Delta T=4{,}12$ Дж.

Задачи

1.81. Тело массой $m=5$ кг поднимают с ускорением $a=2$ м/с^2. Определить работу силы в течение первых пяти секунд. [1,48 кДж]

1.82. Автомашина массой $m=1{,}8$ т движется в гору, уклон которой составляет 3 м на каждые 100 м пути. Определить: 1) работу, совершаемую двигателем автомашины на пути 5 км, если коэффициент трения равен 0,1; 2) развиваемую двигателем мощность, если известно, что этот путь был преодолен за 5 мин. [1) 11,5 кДж; 2) 38,3 кВт]

1.83. Определить работу, совершаемую при подъеме груза массой $m=50$ кг по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=30°$ к горизонту на расстояние $s=4$ м, если время подъема $t=2$ с, а коэффициент трения $f=0{,}06$. [1,48 кДж]

1.84. Тело скользит с наклонной плоскости высотой h и углом наклона α к горизонту и движется далее по горизонтальному участку. Принимая коэффициент трения на всем пути постоянным и равным f, определить расстояние s, пройденное телом на горизонтальном участке, до полной остановки. [$s=h(1-f\,\mathrm{ctg}\,\alpha)/f$]

1.85. Насос мощностью N используют для откачки нефти с глубины h. Определить массу жидкости, поднятой за время t, если к.п.д. насоса равен η. [$m=\eta Nt/(gh)$]

1.86. Поезд массой $m=600$ т движется под гору с уклоном $\alpha=0{,}3°$ и за время $t=1$ мин развивает скорость $v=18$ км/ч. Коэффициент трения $f=0{,}01$. Определить среднюю мощность $\langle N\rangle$ локомотива. [195 кВт]

1.87. Автомобиль массой $m=1{,}8$ т спускается при выключенном двигателе с постоянной скоростью $v=54$ км/ч по уклону дороги (угол к горизонту $\alpha=3°$). Определить, какова должна быть мощность двигателя автомобиля, чтобы он смог подниматься на такой же подъем с той же скоростью. [27,7 кВт]

1.88. Материальная точка массой $m=1$ кг двигалась под действием некоторой силы согласно уравнению $s=A-Bt+Ct^2-Dt^3$ ($B=3$ м/с, $C=5$ м/с^2, $D=1$ м/с^3). Определить мощность N, затрачиваемую на движение точки в момент времени $t=1$ с. [16 Вт]

1.89. Ветер действует на парус площадью S с силой $F=As\rho(v_0-v)^2/2$, где A — некоторая постоянная; ρ — плотность воздуха; v_0 — скорость ветра; v — скорость лодки. Определить, при какой скорости лодки мгновенная мощность ветра максимальна. [$v=v_0/3$]

1.90. Тело массой m поднимается без начальной скорости с поверхности Земли под действием силы $\mathbf{F}$, меняющейся с высотой подъема y по закону $\mathbf{F}=-2m\mathbf{g}(1-Ay)$ (где A — некоторая положительная постоянная), и силы тяжести $m\mathbf{g}$. Определить: 1) весь путь подъема; 2) работу силы $\mathbf{F}$ на первой трети пути подъема. Поле силы тяжести считать однородным. [1) $H=1/A$; 2) $A_F=5mg/(9A)$]

1.91. Тело массой m начинает двигаться под действием силы $\mathbf{F}=2t\mathbf{i}+3t^2\mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — соответственно единичные векторы координатных осей x и y. Определить мощность $N(t)$, развиваемую силой в момент времени t. [$N(t)=(2t^3+3t^5)/m$]

1.92. Тело массой $m=5$ кг падает с высоты $h=20$ м. Определить сумму потенциальной и кинетической энергий тела в точке, находящейся от поверхности Земли на высоте $h_1=5$ м. Трением тела о воздух пренебречь. Сравнить эту энергию с первоначальной энергией тела. [981 Дж]

1.93. Тело, падая с некоторой высоты, в момент соприкосновения с Землей обладает импульсом $p=100$ кг·м/с и кинетической энергией $T=500$ Дж. Определить: 1) с какой высоты тело падало; 2) массу тела. [1) 5,1 м; 2) 10 кг]

1.94. С башни высотой $H=20$ м горизонтально со скоростью $v_0=10$ м/с брошен камень массой $m=400$ г. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить для момента времени $t=1$ с после начала движения: 1) кинетическую энергию; 2) потенциальную энергию. [1) 39,2 Дж; 2) 59,2 Дж]

1.95. Автомашина массой $m=2000$ кг останавливается за $t=6$ с, пройдя расстояние $s=30$ м. Определить: 1) начальную скорость автомашины; 2) силу торможения. [1) 10 м/с; 2) 3,33 кН]

1.96. Материальная точка массой $m=20$ г движется по окружности радиусом $R=10$ см с постоянным тангенциальным ускорением. К концу пятого оборота после начала движения кинетическая энергия материальной точки оказалась равной 6,3 мДж. Определить тангенциальное ускорение. [0,1 м/с^2]

1.97. Ядро массой $m=5$ кг бросают под углом $\alpha=60°$ к горизонту, затрачивая при этом работу 500 Дж. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) через какое время ядро упадет на землю, 2) какое расстояние по горизонтали оно пролетит. [1) 2,5 с; 2) 17,6 м]

1.98. Тело массой $m=0,5$ кг бросают со скоростью $v_0=10$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить кинетическую T, потенциальную Π и полную E энергии тела: 1) через $t=0,4$ с после начала движения; 2) в высшей точке траектории. [1) $T=19,0$ Дж, $\Pi=5,9$ Дж, $E=24,9$ Дж; 2) $T=18,7$ Дж, $\Pi=6,2$ Дж, $E=24,9$ Дж]

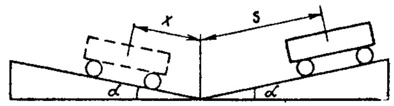


Рис. 18

1.99. Тележка проходит расстояние $s=300$ м под гору с уклоном $\alpha=5°$ и продолжает двигаться в гору с тем же уклоном (рис. 18). Принимая коэффициент трения f постоянным и равным 0,05, определить расстояние x, на которое поднимается тележка. [81,8 м]

1.100. К нижнему концу пружины жесткостью k_1 присоединена другая пружина жесткостью k_2, к концу которой прикреплена гиря. Пренебрегая массой пружин, определить отношение потенциальных энергий пружин. [$\Pi_1/\Pi_2=k_2/k_1$]

1.101. Тело массой $m=0,4$ кг скользит с наклонной плоскости высотой $h=10$ см и длиной $l=1$ м. Коэффициент трения тела на всем пути $f=0,04$. Определить: 1) кинетическую энергию тела у основания плоскости; 2) путь, пройденный телом на горизонтальном участке до остановки. [1) 0,24 Дж; 2) 1,53 м]

1.102. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0=20$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на какой высоте h кинетическая энергия тела будет равна его потенциальной энергии. [10,2 м]

1.103. Тело массой $m=70$ кг движется под действием постоянной силы $F=63$ Н. Определить, на каком пути s скорость этого тела возрастет в $n=3$ раза по сравнению с моментом времени, когда скорость тела была равна $v_0=1,5$ м/с. [10 м]

1.104. Подвешенный на нити шарик массой $m=200$ г отклоняют на угол $\alpha=45°$. Определить силу натяжения нити в момент прохождения шариком положения равновесия. [3,11 Н]

1.105. При абсолютно упругом ударе костяных шаров одинаковой массы всегда отскакивает столько шаров, сколько налетает. Доказать этот результат.

1.106. Тело брошено под углом $\alpha=45°$ к горизонту со скоростью $v_0=15$ м/с. Используя закон сохранения энергии, определить скорость v тела в высшей точке его траектории. [$v=v_0\cos\alpha=10{,}6$ м/с]

1.107. Шайба массой m скользит без трения с высоты h по желобу, переходящему в петлю радиусом R. Определить: 1) силу давления F шайбы на опору в точке, определяемой углом α (рис. 19); 2) угол α, при котором произойдет отрыв шайбы. $\left[1)\ F=mg\times\times\left(2\frac{h-R(1+\sin\alpha)}{R}-\sin\alpha\right);\ 2)\ \alpha=\arcsin\frac{2}{3}\left(\frac{h}{R}-1\right)\right]$

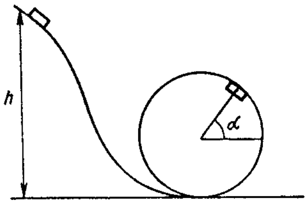


Рис. 19

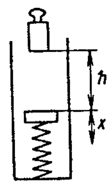


Рис. 21

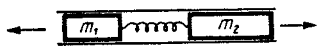


Рис. 20

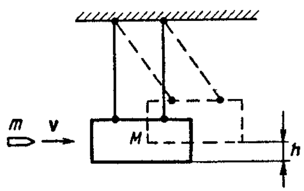


Рис. 22

1.108. Пренебрегая трением, определить наименьшую высоту h, с которой должна скатываться тележка с человеком по желобу, переходящему в петлю радиуса $R=6$ м, и не оторваться от него в верхней точке петли. [15 м]

1.109. Спортсмен с высоты $h=12$ м падает на упругую сетку. Пренебрегая массой сетки, определить, во сколько раз наибольшая сила давления спортсмена на сетку больше его силы тяжести, если прогиб сетки под действием силы тяжести спортсмена $x_0=15$ см. [в 13,7 раза]

1.110. С вершины идеально гладкой сферы радиусом $R=1{,}2$ м соскальзывает небольшое тело. Определить высоту h (от вершины сферы), с которой тело со сферы сорвется. [40 см]

1.111. Два цилиндра массами $m_1=150$ г и $m_2=300$ г, соединенные сжатой пружиной, разошлись при внезапном освобождении пружины в разные стороны (рис. 20). Пренебрегая силами сопротивления и учитывая, что кинетическая энергия T упругой деформации пружины составляет 1,8 Дж, определить: 1) скорость v_1 движения первого цилиндра; 2) скорость v_2 движения второго цилиндра. [1) 4 м/с; 2) 2 м/с]

1.112. Гиря массой $m=10$ кг падает с высоты $h=0{,}5$ м на подставку, скрепленную с пружиной жесткостью $k=30$ Н/см (рис. 21). Определить при этом смещение x пружины. [21,6 см]

1.113. Пуля массой $m=15$ г, летящая с горизонтальной скоростью $v=0{,}5$ км/с, попадает в баллистический маятник массой $M=6$ кг (рис. 22) и застревает в нем. Определить высоту h, на которую поднимется маятник, откачнувшись после удара. [7,9 см]

1.114. Пуля массой $m=15$ г, летящая горизонтально, попадает в баллистический маятник длиной $l=1$ м и массой $M=1{,}5$ кг и застревает в нем (рис. 22). Маятник в результате этого отклонился на угол $\varphi=30°$. Определить скорость пули. [164 м/с]

1.115. Пуля массой $m=15$ г, летящая горизонтально со скоростью $v=200$ м/с, попадает в баллистический маятник длиной $l=1$ м и массой $M=1{,}5$ кг и застревает в нем. Определить угол отклонения φ маятника. [36,9°]

1.116. Пуля массой $m=12$ г, летящая с горизонтальной скоростью $v=0{,}6$ км/с, попадает в мешок с песком массой $M=10$ кг, висящий на длинной нити, и застревает в нем. Определить: 1) высоту, на которую поднимется мешок, отклонившись после удара; 2) долю кинетической энергии, израсходованной на пробивание песка. [1) 2,64 см; 2] 99,9 %]

1.117. Зависимость потенциальной энергии П тела в центральном силовом поле от расстояния r до центра поля задается функцией $\Pi(r)=\frac{A}{r^2}-\frac{B}{r}$ ($A=6$ мкДж·м^2, $B=0{,}3$ мДж·м). Определить, при каких значениях r

максимальное значение принимают: 1) потенциальная энергия тела; 2) сила, действующая на тело. [1) $r=2A/B=4$ см; 2) $r=3A/B=6$ см]

1.118. На рис. 23 представлена качественная зависимость потенциальной энергии П взаимодействия двух частиц от расстояния r между ними. Объяснить, каким расстояниям между частицами соответствует равновесие, при каком расстоянии оно является устойчивым и при каком — неустойчивым.

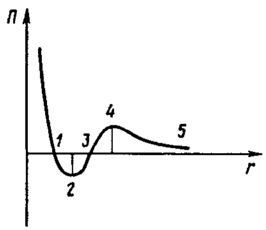


Рис. 23

1.119 Сила, действующая на тело в некотором поле консервативных сил, описывается законом $\mathbf{F}=A(y\mathbf{i}+x\mathbf{j})$, где A — некоторая постоянная, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — соответственно единичные векторы координатных осей x и y. Определить потенциальную энергию $\Pi(x, y)$ тела в этом поле. [$\Pi(x, y)=-Axy+C$, где C — аддитивная постоянная].

1.120. Металлический шарик падает вертикально на мраморный пол с высоты $h_1=80$ см и отскакивает от него на высоту $h_2=72$ см. Определить коэффициент восстановления материала шарика. [0,95]

1.121. Шарик из некоторого материала, падая вертикально с высоты $h=0{,}9$ м, несколько раз отскакивает от пола. Определить коэффициент восстановления материала шарика при ударе о пол, если с момента падения до второго удара прошло время $t=1$ с. [0,67]

1.122. При центральном упругом ударе движущееся тело массой m_1 ударяется в покоящееся тело массой m_2, в результате чего скорость первого тела уменьшается в 2 раза. Определить: 1) во сколько раз масса первого тела больше массы второго тела; 2) кинетическую энергию T_2' второго тела непосредственно после удара, если первоначальная кинетическая энергия T_1 первого тела равна 800 Дж. [1) в 3 раза; 2) 450 Дж]

1.123. Определить, во сколько раз уменьшится скорость шара, движущегося со скоростью v_1, при его соударении с покоящимся шаром, масса которого в n раз больше массы налетающего шара. Удар считать центральным абсолютно упругим. [В $(1+n)/(1-n)$ раза]

1.124. Тело массой $m_1=3$ кг движется со скоростью $v_1=2$ м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, определить количество теплоты, выделившееся при ударе. [3 Дж]

1.125. Два шара массами $m_1=9$ кг и $m_2=12$ кг подвешены на нитях длиной $l=1{,}5$ м. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол $\alpha=30°$ и отпустили. Считая удар неупругим, определить высоту h, на которую поднимутся оба шара после удара. $\left[h=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 l(1-\cos\alpha)=3{,}7 \text{ см}\right]$

1.126. Два шара массами $m_1=3$ кг и $m_2=2$ кг подвешены на нитях длиной $l=1$ м. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем больший шар отклонили от положения равновесия на угол $\alpha=60°$ и отпустили. Считая удар упругим, определить скорость v_2' второго шара после удара. [3,76 м/с]

1.127. Два шара массами $m_1=200$ г и $m_2=400$ г подвешены на нитях длиной $l=67{,}5$ см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем первый шар отклонили от положения равновесия на угол $\alpha=60°$ и отпустили. Считая удар упругим, определить на какую высоту h поднимется второй шар после удара. $\left[h=\frac{4m_1^2 l(1-\cos\alpha)}{(m_1+m_2)^2}=15 \text{ см}\right]$

1.128. Шар сталкивается с другим покоящимся шаром такой же массы. Доказать, что в случае упругого, но не центрального удара угол между направлениями скоростей после удара составляет $\pi/2$.

1.4. Механика твердого тела

Основные законы и формулы

- Момент инерции материальной точки

$$J=mr^2,$$

где m — масса точки, r — расстояние до оси вращения.

- Момент инерции системы (тела)

$$J=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

где r_i — расстояние материальной точки массой m_i до оси вращения. В случае непрерывного распределения масс $J=\int r^2 \mathrm{d}m$.

● Моменты инерции тел правильной геометрической формы (тела считаются однородными, m — масса тела):

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	То же	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
То же	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

● Теорема Штейнера

$$J = J_C + ma^2,$$

где J_C — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; J — момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии a; m — масса тела.

● Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z,

$$T_{\text{вр}} = J_z\omega^2/2,$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси z; ω — его угловая скорость.

● Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения,

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\,\omega^2,$$

где m — масса тела; v_C — скорость центра масс тела, J_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω — угловая скорость тела.

● Момент силы относительно неподвижной точки

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}],$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы $\mathbf{F}$. Модуль момента силы

$$M = Fl,$$

где l — плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения).

● Работа при вращении тела

$$dA = M_z d\varphi,$$

где $d\varphi$ — угол поворота тела; M_z — момент силы относительно оси z.

● Момент импульса (момент количества движения) твердого тела относительно оси вращения

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i = J_z\omega,$$

где r_i — расстояние от оси z до отдельной частицы тела; $m_i v_i$ — импульс этой частицы; J_z — момент инерции тела относительно оси z; ω — его угловая скорость.

● Уравнение (закон) динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}; \quad M_z = J_z\frac{d\omega}{dt} = J_z\varepsilon,$$

где ε — угловое ускорение; J_z — момент инерции тела относительно оси z.

● Закон сохранения момента импульса (момента количества движения) для замкнутой системы

$$\mathbf{L} = \text{const}.$$

● Напряжение при упругой деформации

$$\sigma = F/S,$$

где F — растягивающая (сжимающая) сила; S — площадь поперечного сечения.

● Относительное продольное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon = \Delta l/l,$$

где Δl — изменение длины тела при растяжении (сжатии); l — длина тела до деформации.

● Относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \Delta d/d,$$

где Δd — изменение диаметра стержня при растяжении (сжатии); d — диаметр стержня.

● Связь между относительным поперечным сжатием (растяжением) ε' и относительным продольным растяжением (сжатием) ε

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon,$$

где μ — коэффициент Пуассона.

● Закон Гука для продольного растяжения (сжатия)

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E — модуль Юнга.

● Потенциальная энергия упругорастянутого (сжатого) стержня

$$\Pi=\int\limits_0^{\Delta l} F\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{ES}{l}(\Delta l)^2=\frac{E\varepsilon^2}{2}V,$$

где V — объем тела.

Примеры решения задач

Задача 7. Через неподвижный блок в виде однородного сплошного цилиндра массой $m=160$ г перекинута невесомая нить, к концам которой подвешены грузы массами $m_1=200$ г и $m_2=300$ г. Пренебрегая трением в оси блока, определить: 1) ускорение a грузов; 2) силы натяжения T_1 и T_2 грузов.

Дано: $m=160\text{ г}=0{,}16$ кг, $m_1=200\text{ г}=0{,}2$ кг, $m_2=300\text{ г}=0{,}3$ кг.

Определить: 1) a; 2) T_1, T_2.

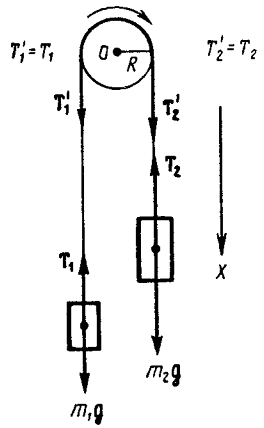


Рис. 24

Решение. Направив ось x вертикально вниз (рис. 24), запишем для каждого груза уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекциях на эту ось:

$$m_1a=T_1-m_1g, \tag{1}$$

$$m_2a=m_2g-T_2, \tag{2}$$

где T_1 и T_2 — силы натяжения нитей; они не одинаковые; так как $T_2>T_1$: за счет этого обеспечивается вращающий момент, действующий на блок.

Согласно основному закону динамики вращательного движения, вращающий момент, приложенный к цилиндру.

$$M_z=J_z\varepsilon, \tag{3}$$

где J_z — момент инерции цилиндра относительно оси вращения, перпендикулярной плоскости чертежа и направленной за чертеж; ε — угловое ускорение. С другой стороны

$$M_z=(T_2'-T_1')R, \tag{4}$$

где T_1' и T_2' — силы, приложенные к ободу цилиндра; R — плечо силы, равное радиусу цилиндра. По третьему закону

Ньютона, с учетом невесомости нити $T_1'=T_1$ и $T_2'=T_2$. Воспользовавшись этим, получим, приравняв (3) и (4),

$$(T_2-T_1)R=J_z\varepsilon, \tag{5}$$

где $J_z=mR^2/2$, $\varepsilon=a/R$.

Решение уравнений (1), (2), (5) после подстановки значений J_z и ε, приводит к искомому выражению для ускорения:

$$a=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+m/2}g.$$

Из уравнений (1) и (2) находим силы натяжения T_1 и T_2:

$$T_1=m_1(g+a);\quad T_2=m_2(g-a).$$

Вычисляя, получим: 1) $a=1{,}69$ м/с^2; 2) $T_1=2{,}3$ Н; $T_2=2{,}44$ Н.

Задача 8. Человек сидит в центре скамьи Жуковского, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой $n_1=30$ мин$^{-1}$. В вытянутых в стороны руках он держит по гире массой $m=5$ кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси вращения $l_1=60$ см. Суммарный момент инерции человека и скамьи относительно оси вращения $J_0=2$ кг·м^2. Определить: 1) частоту n_2 вращения скамьи с человеком; 2) какую работу A совершит человек, если он прижмет гантели к себе так, что расстояние от каждой гири до оси станет равным $l_2=20$ см

Дано: $n_1=30$ мин$^{-1}=0{,}5$ с$^{-1}$, $m=5$ кг, $l_1=60\text{ см}=0{,}6$ м, $J_0=2$ кг·м^2, $l_2=20\text{ см}=0{,}2$ м.

Определить: 1) n_2; 2) A.

Решение. По условию задачи момент внешних сил относительно вертикальной оси вращения равен нулю, поэтому момент импульса этой системы сохраняется, т. е.

$$J_1\omega_1=J_2\omega_2, \tag{1}$$

где $J_1=J_0+2ml_1^2$ и $J_2=J_0+2ml_2^2$ — соответственно момент инерции всей системы до сближения и после сближения; m — масса каждой гири. Угловая скорость $\omega=2\pi n$. Подставляя эти выражения в уравнение (1), получим искомую частоту вращения:

$$n_2=\frac{J_0+2ml_1^2}{J_0+2ml_2^2}n_1$$

Работа, совершенная человеком, равна изменению кинетической энергии системы:

$$A=T_2-T_1=\frac{J_2\omega_2^2}{2}-\frac{J_1\omega_1^2}{2}.$$

Выразив из уравнения (1) $\omega_2=J_1\omega_1^2/J_2$, получим

$$A=\frac{J_1\omega_1^2}{2}\left(\frac{J_1}{J_2}-1\right)=\frac{J_1\omega_1^2}{2J_2}(J_1-J_2)=\frac{2J_1\pi^2n_1^2}{J_2}(J_1-J_2).$$

Вычисляя, находим: 1) $n_2=70$ мин$^{-1}$; 2) $A=36{,}8$ Дж.

Задача 9. Медная проволока длиной $l=80$ см и сечением $S=8$ мм^2 закреплена одним концом в подвесном устройстве, а к ее другому концу прикреплен груз массой $m=400$ г. Вытянутую проволоку с грузом, отклонив до высоты подвеса, отпускают. Считая проволоку невесомой, определить ее удлинение в нижней точке траектории движения груза. Модуль Юнга для меди $E=118$ ГПа.

Дано: $l=80$ см $=0{,}8$ м, $S=8$ мм$^2=8\cdot10^{-6}$ м^2, $m=400$ г $=0{,}4$ кг, $E=118$ ГПа $=1{,}18\cdot10^{11}$ Па.

Определить Δl.

Решение. Из закона Гука для продольного растяжения $\sigma=E\varepsilon$, где $\sigma=F/S$ — напряжение при упругой деформации, E — модуль Юнга; $\varepsilon=\Delta l/l$ — относительное продольное растяжение, получим

$$\Delta l=\frac{Fl}{ES}, \tag{1}$$

где F — сила, растягивающая проволоку в нижней точке траектории груза. Она численно равна сумме силы тяжести груза и центростремительной силы, действующей на груз:

$$F=mg+\frac{mv^2}{l+\Delta l}, \tag{2}$$

где v — скорость груза.

Согласно закону сохранения механической энергии,

$$\frac{mv^2}{2}=mg(l+\Delta l).$$

Подставив найденное отсюда выражение mv^2 в формулу (2), получим, что $F=3mg$. Тогда из выражения (1) следует, что искомое удлинение проволоки

$$\Delta l=3mgl/(ES).$$

Вычисляя, находим $\Delta l=9{,}98\cdot10^{-4}$ м.

Задачи

1.129. Вывести формулу для момента инерции тонкого кольца радиусом R и массой m относительно оси симметрии. [$J=mR^2$]

1.130. Вывести формулу для момента инерции тонкого стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно его длине. $\left[J=\frac{1}{12}ml^2\right]$

1.131. Вывести формулу для момента инерции сплошного шара радиусом R и массой m относительно оси, проходящей через центр шара. $\left[J=\frac{2}{5}mR^2\right]$

1.132. Вывести формулу для момента инерции полого шара относительно оси, проходящей через его центр. Масса шара равна m, внутренний радиус — r, внешний — R. $\left[J=\frac{2}{5}m\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}\right]$

1.133. Вывести формулу для момента инерции цилиндрической муфты относительно оси, совпадающей с ее осью симметрии. Масса муфты равна m, внутренний радиус — r, внешний — R. $\left[J=\frac{1}{2}m(R^2+r^2)\right]$

1.134. Определить момент инерции сплошного однородного диска радиусом $R=40$ см и массой $m=1$ кг относительно оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска. [0,12 кг·м^2]

1.135. Определить момент инерции J тонкого однородного стержня длиной $l=50$ см и массой $m=360$ г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: 1) конец стержня; 2) точку, отстоящую от конца стержня на $^1/_6$ его длины. [1) $3\cdot10^{-2}$ кг·м^2; 2) $1{,}75\cdot10^{-2}$ кг·м^2]

1.136. Шар и сплошной цилиндр, изготовленные из одного и того же материала, одинаковой массы катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Определить, во сколько раз кинетическая энергия шара меньше кинетической энергии сплошного цилиндра. [В 1,07 раза]

1.137. Полная кинетическая энергия T диска, катящегося по горизонтальной поверхности, равна 24 Дж. Определить кинетическую энергию T_1 поступательного и T_2 вращательного движения диска. [$T_1=16$ Дж, $T_2=8$ Дж]

1.138. Полый тонкостенный цилиндр массой $m=0{,}5$ кг, катящийся без скольжения, ударяется о стену и откатывается от нее. Скорость цилиндра до удара о стену $v_1=1{,}4$ м/с, после удара $v_1'=1$ м/с. Определить выделившееся при ударе количество теплоты Q. [$Q=m(v_1^2-v_1'^2)=0{,}48$ Дж]

1.139. К ободу однородного сплошного диска массой $m = 10$ кг, насаженного на ось, приложена постоянная касательная сила $F = 30$ Н. Определить кинетическую энергию диска через время $t = 4$ с после начала действия силы. [1,44 кДж]

1.140. Шар радиусом $R = 10$ см и массой $m = 5$ кг вращается вокруг оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ ($B = 2$ рад/с^2, $C = -0{,}5$ рад/с^3). Определить момент сил M для $t = 3$ с. [$-0{,}1$ Н·м]

1.141. Вентилятор вращается с частотой $n = 600$ об/мин. После выключения он начал вращаться равнозамедленно и, сделав $N = 50$ оборотов, остановился. Работа A сил торможения равна 31,4 Дж. Определить: 1) момент M сил торможения; 2) момент инерции J вентилятора. [1) 0,1 Н·м; 2) 15,9 мН·м]

1.142. Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого $J = 150$ кг·м^2, вращается с частотой $n = 240$ об/мин. Через время $t = 1$ мин, как на маховик стал действовать момент сил торможения, он остановился. Определить: 1) момент M сил торможения; 2) число оборотов маховика от начала торможения до полной остановки. [1) 62,8 Н·м; 2) 120]

1.143 Сплошной однородный диск скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определить линейное ускорение a центра диска. [$a = {}^2/_3 g \sin\alpha$]

1.144. К ободу однородного сплошного диска радиусом $R = 0{,}5$ м приложена постоянная касательная сила $F = 100$ Н. При вращении диска на него действует момент сил трения $M_{тр} = 2$ Н·м. Определить массу m диска, если известно, что его угловое ускорение ε постоянно и равно 16 рад/с^2. [24 кг]

1.145 Частота вращения n_0 маховика, момент инерции J которого равен 120 кг·м^2, составляет 240 об/мин. После прекращения действия на него вращающего момента маховик под действием сил трения в подшипниках остановился за время $t = \pi$ мин. Считая трение в подшипниках постоянным, определить момент M сил трения. [16 Н·м]

1.146 Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого $J = 1{,}5$ кг·м^2, вращаясь при торможении равнозамедленно, за время $t = 1$ мин уменьшил частоту своего вращения с $n_0 = 240$ об/мин до $n_1 = 120$ об/мин. Определить: 1) угловое ускорение ε маховика; 2) момент M силы торможения; 3) работу торможения A. [1) 0,21 рад/с^2, 2) 0,047 Н·м; 3) 355 Дж]

1.147. Колесо радиусом $R = 30$ см и массой $m = 3$ кг скатывается по наклонной плоскости длиной $l = 5$ м и углом наклона $\alpha = 25°$. Определить момент инерции колеса, если его скорость v в конце движения составляла 4,6 м/с. [0,259 кг·м^2]

1.148. С наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ к горизонту, скатывается без скольжения шарик. Пренебрегая трением, определить время движения шарика по наклонной плоскости, если известно, что его центр масс при скатывании понизился на 30 см. [0,585 с]

1.149. Полый тонкостенный цилиндр катится вдоль горизонтального участка дороги со скоростью $v = 1{,}5$ м/с. Определить путь, который он пройдет в гору за счет кинетической энергии, если уклон горы равен 5 м на каждые 100 м пути. [4,59 м]

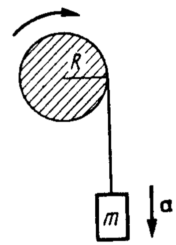


Рис. 25

1.150. На однородный сплошной цилиндрический вал (рис. 25) радиусом $R = 50$ см намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 6{,}4$ кг. Груз, разматывая нить, опускается с ускорением $a = 2$ м/с^2. Определить: 1) момент инерции J вала; 2) массу M вала. [1) 6,25 кг·м^2; 2) 50 кг]

1.151. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 5$ см и массой $M = 10$ кг намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 1$ кг (рис. 25). Определить: 1) зависимость $s(t)$, согласно которой движется груз; 2) силу натяжения нити T; 3) зависимость $\varphi(t)$, согласно которой вращается вал; 4) угловую скорость ω вала через $t = 1$ с после начала движения; 5) тангенциальное (a_τ) и нормальное (a_n) ускорения точек, находящихся на поверхности вала. [1) $s = 0{,}82t^2$; 2) 8,2 Н; 3) $\varphi = 16{,}4t^2$; 4) 32,8 рад/с; 5) $a_\tau = 1{,}64$ м/с^2, $a_n = 53{,}8$ м/с^2]

1.152. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 20$ см, момент инерции которого $J = 0{,}15$ кг·м^2, намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 0{,}5$ кг. До начала вращения барабана высота h груза над полом составляла 2,3 м. Определить: 1) время опускания груза до пола; 2) силу натяжения нити; 3) кинетическую энергию груза в момент удара о пол. [1) 2 с; 2) 4,31 Н; 3) 1,32 Дж]

1.153. Через неподвижный блок в виде однородного сплошного цилиндра массой $m=0{,}2$ кг перекинута невесомая нить, к концам которой прикреплены тела массами $m_1=0{,}35$ кг и $m_2=0{,}55$ кг. Пренебрегая трением в оси блока, определить: 1) ускорение грузов; 2) отношение T_2/T_1 сил натяжения нити. [1) 1,96 м/с^2; 2) 1,05]

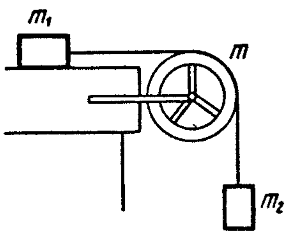


Рис. 26

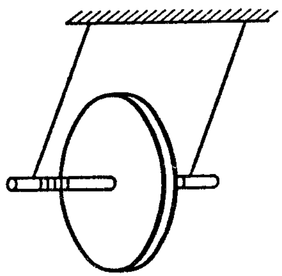


Рис. 27

1.154. Тело массой $m_1=0{,}25$ кг (рис. 26), соединенное невесомой нитью посредством блока (в виде полого тонкостенного цилиндра) с телом массой $m_2=0{,}2$ кг, скользит по поверхности горизонтального стола. Масса блока $m=0{,}15$ кг. Коэффициент трения f тела о поверхность равен 0,2. Пренебрегая трением в подшипниках, определить: 1) ускорение a, с которым будут двигаться эти тела; 2) силы натяжения T_1 и T_2 нити по обе стороны блока. [1) 2,45 м/с^2; 2) $T_1=1{,}1$ Н, $T_2=1{,}47$ Н]

1.155. Для демонстрации законов сохранения применяется маятник Максвелла, представляющий собой массивный диск радиусом R и массой m, туго насаженный на ось радиусом r, которая подвешивается на двух предварительно намотанных на нее нитях (рис. 27). Когда маятник отпускают, то он совершает возвратно-поступательное движение в вертикальной плоскости при одновременном движении диска вокруг оси. Не учитывая сил сопротивления и момента инерции оси, определить: 1) ускорение поступательного движения маятника; 2) силу натяжения нити.

$\left[1)\ a=\dfrac{g}{1+R^2/(2r^2)};\ 2)\ T=\dfrac{mR_2}{2}\dfrac{g}{R^2+2r^2}\right]$

1.156. Однородный шар радиусом $r=20$ см скатывается без скольжения с вершины сферы радиусом $R=50$ см. Определить угловую скорость ω шара после отрыва от поверхности сферы. $\left[\omega=\sqrt{\dfrac{10}{17}\dfrac{g(R+r)}{r^2}}=10\ \text{рад/с}\right]$

1.157. Маховик начинает вращаться из состояния покоя с постоянным угловым ускорением $\varepsilon=0{,}4$ рад/с^2. Определить кинетическую энергию маховика через время $t_2=25$ с после начала движения, если через $t_1=10$ с после начала движения момент импульса L_1 маховика составлял 60 кг·м^2/с. [1) $T=L_1\varepsilon t_2^2/(2t_1)=750$ Дж]

1.158. Горизонтальная платформа массой $m=25$ кг и радиусом $R=0{,}8$ м вращается с частотой $n_1=18$ мин$^{-1}$. В центре стоит человек и держит в расставленных руках гири. Считая платформу диском, определить частоту вращения платформы, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от $J_1=3{,}5$ кг·м^2 до $J_2=1$ кг·м^2. [23 мин$^{-1}$]

1.159. Человек, стоящий на скамье Жуковского, держит в руках стержень длиной $l=2{,}5$ м и массой $m=8$ кг, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамейки. Эта система (скамья и человек) обладает моментом инерции $J=10$ кг·м^2 и вращается с частотой $n_1=12$ мин$^{-1}$. Определить частоту n_2 вращения системы, если стержень повернуть в горизонтальное положение. [8,5 мин$^{-1}$]

1.160. Человек массой $m=60$ кг, стоящий на краю горизонтальной платформы массой $M=120$ кг, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой $n_1=10$ мин$^{-1}$, переходит к ее центру. Считая платформу круглым однородным диском, а человека — точечной массой, определить, с какой частотой n_2 будет тогда вращаться платформа. [20 мин$^{-1}$]

1.161. Платформа, имеющая форму сплошного однородного диска, может вращаться по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси. На краю платформы стоит человек, масса которого в 3 раза меньше массы платформы. Определить, как и во сколько раз изменится угловая скорость вращения платформы, если человек перейдет ближе к центру на расстояние, равное половине радиуса платформы. [Возрастет в 1,43 раза]

1.162 Человек массой $m=60$ кг, стоящий на краю горизонтальной платформы радиусом $R=1$ м и массой $M=120$ кг, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой $n_1=10$ мин$^{-1}$, переходит к ее центру. Считая платформу круглым однородным диском, а человека — точечной массой, определить работу, совершаемую человеком при переходе от края платформы к ее центру. [65,8 Дж]

1.163. Дайте определение и объяснение гироскопического эффекта.

1.164. К проволоке из углеродистой стали длиной $l=1{,}5$ м и диаметром $d=2{,}1$ мм подвешен груз массой $m=110$ кг. Принимая для стали модуль Юнга $E=216$ ГПа и предел пропорциональности $\sigma_п=330$ МПа, определить· 1) какую долю первоначальной длины составляет удлинение проволоки при этом грузе, 2) превышает приложенное напряжение или нет предел пропорциональности. [1) 0,14 %; 2) нет]

1.165. Медная проволока сечением $S=8$ мм^2 под действием растягивающей силы удлинилась на столько, на сколько она удлиняется при нагревании на 30 К. Принимая для меди модуль Юнга $E=118$ ГПа и коэффициент линейного расширения $\alpha=1{,}7\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$, определить числовое значение этой силы [481 Н]

1.166. Резиновый шнур длиной 40 см и внутренним диаметром 8 мм натянут так, что удлинился на 8 см. Принимая коэффициент Пауссона для резины равным 0,5, определить внутренний диаметр натянутого шнура [7,2 мм]

1.167. Определить работу, которую необходимо затратить, чтобы сжать пружину на 15 см, если известно, что сила пропорциональна деформации и под действием силы 20 Н пружина сжимается на 1 см. [22,5 Дж]

1.168. Определить относительное удлинение алюминиевого стержня, если при его растяжении затрачена работа $A=6{,}9$ Дж Длина стержня $l=1$ м, площадь поперечного сечения $S=1$ мм^2, модуль Юнга для алюминия $E=69$ ГПа [$\Delta l/l=\sqrt{2A/(ESl)}=0{,}014$]

1.169. Определить объемную плотность потенциальной энергии упругорастянутого медного стержня, если относительное изменение длины стержня $\varepsilon=0{,}01$ и для меди модуль Юнга $E=118$ ГПа. [5,9 МДж/м^3]

1.170. Два вагона массами $m=15$ т движутся навстречу друг другу со скоростями $v=3$ м/с и сталкиваются между собой. Определить сжатие пружины буферов вагонов, если известно, что сила пропорциональна деформации и под действием силы $F=50$ кН пружина сжимается на $\Delta l=1$ см. [$l=v\sqrt{m\Delta l/(2F)}=11{,}6$ см]

1.5. Тяготение. Элементы теории поля

Основные законы и формулы

- Третий закон Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{R_1^3}{R_2^3},$$

где T_1 и T_2 — периоды обращения планет вокруг Солнца, R_1 и R_2 — большие полуоси их орбит

- Закон всемирного тяготения

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2},$$

где F — сила всемирного тяготения (гравитационная сила) двух материальных точек массами m_1 и m_2, r — расстояние между точками; G — гравитационная постоянная

- Сила тяжести

$$P=mg,$$

где m — масса тела, g — ускорение свободного падения.

- Напряженность поля тяготения

$$\mathbf{g}=\mathbf{F}/m,$$

где $\mathbf{F}$ — сила тяготения, действующая на материальную точку массой m, помещенную в данную точку поля

- Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$\Pi=-Gm_1m_2/r$$

- Потенциал поля тяготения

$$\varphi=\Pi/m,$$

где Π — потенциальная энергия материальной точки массой m, помещенной в данную точку поля.

- Связь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью

$$\mathbf{g}=-\operatorname{grad}\varphi,\ \text{или}\ \mathbf{g}=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right),$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы координатных осей

- Первая и вторая космические скорости

$$v_1=\sqrt{gR_0},\quad v_2=\sqrt{2gR_0},$$

где R_0 — радиус Земли.
- Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета

$$m\mathbf{a}'=m\mathbf{a}+\mathbf{F}_{\text{ин}},$$

где **a** и **a′** — соответственно ускорение тела в инерциальной и неинерциальной системах отсчета, $\mathbf{F}_{\text{ин}}$ — силы инерции.
- Силы инерции

$$\mathbf{F}_{\text{ин}}=\mathbf{F}_{\text{и}}+\mathbf{F}_{\text{ц}}+\mathbf{F}_{\text{К}},$$

где $\mathbf{F}_{\text{и}}$ — силы инерции, проявляющиеся при поступальном движении системы отсчета с ускорением a_0: $F_{\text{и}}=-ma_0$; $\mathbf{F}_{\text{ц}}$ — центробежные силы инерции (силы инерции, действующие во вращающейся системе отсчета на тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние R): $F_{\text{ц}}=-m\omega^2R$, $\mathbf{F}_{\text{К}}$ — кориолисова сила инерции (силы инерции, действующие на тело, движущееся со скоростью v' во вращающейся системе отсчета:

$$\mathbf{F}_{\text{К}}=2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}].$$

Примеры решения задач

Задача 10. Определить работу сил поля тяготения при перемещении тела массой $m=12$ кг из точки *1*, находящейся от центра Земли на расстоянии $r_1=4R$, в точку *2*, находящуюся от ее центра на расстоянии $r_2=2R$, где R — радиус Земли (рис. 28).

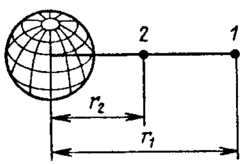


Рис. 28

Дано: $m=12$ кг, $r_1=4R$, $r_2=2R$, $R=6{,}37\cdot10^6$ м.

Определить A_{12}.

Решение. Поскольку силы тяготения консервативны, работа этих сил равна изменению потенциальной энергии системы тело — Земля, взятому с обратным знаком:

$$A_{12}=-\Delta\Pi=\Pi_1-\Pi_2, \qquad (1)$$

где Π_1 и Π_2 — соответственно потенциальные энергии системы тело — Земля в точках *1* и *2*.

Так как $\Pi=-G\dfrac{mM}{r}$ (M — масса Земли), то

$$\Pi_1=-\frac{GmM}{4R} \text{ и } \Pi_2=-\frac{GmM}{2R}.$$

Подставив эти выражения в (1), получим

$$A_{12}=\frac{1}{4}G\frac{mM}{R}.$$

Учитывая, что $G\dfrac{M}{R^2}=g$, придем к выражению для искомой работы:

$$A_{12}={}^1/_4 mgR.$$

Вычисляя, получим $A_{12}=187$ МДж.

Задача 11. Через блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1=2$ кг и $m_2=0{,}5$ кг. Вся система находится в лифте, поднимающемся с ускорением $a_0=2{,}1$ м/с², направленным вверх (рис. 29). Считая нить и блок невесомыми, определить силу давления блока на ось.

Дано: $m_1=2$ кг, $m_2=0{,}5$ кг, $a_0=2{,}1$ м/с².

Определить F.

Решение. Движения грузов рассмотрим в системе отсчета, связанной с лифтом. Эта система является неинерциальной (движется с ускорением относительно Земли). Уравнения движения для грузов в неинерциальной системе отсчета

$$m_1\mathbf{a}'=m_1\mathbf{g}+\mathbf{T}+\mathbf{F}_{\text{и}_1}, \qquad (1)$$

$$m_2\mathbf{a}'=m_2\mathbf{g}+\mathbf{T}+\mathbf{F}_{\text{и}_2}, \qquad (2)$$

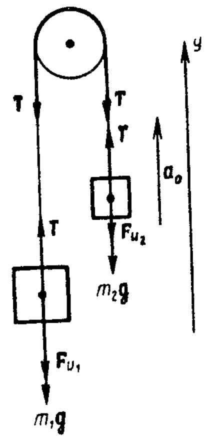


Рис. 29

где **a′** — ускорение тел в неинерциальной системе отсчета (вследствие нерастяжимости нити по модулю одинаковы для обоих тел); T — сила натяжения нитей (одинакова для обоих тел вследствие невесомости блока и нити); $\mathbf{F}_{\text{и}_1}=-m_1\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{F}_2=-m_2\mathbf{a}_0$ — силы инерции

Направив ось y вверх, запишем уравнения (1) и (2) в проекциях на эту ось:

$$-m_1a'=-m_1g+T-m_1a_0,$$

$$m_2a'=-m_2g+T-m_2a_0.$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$a'=\frac{(m_1-m_2)(g+a_0)}{m_1+m_2};$$

$$T = m_1(g+a_0) - m_1 a' = \frac{2m_1 m_2}{m_1+m_2}(g+a_0).$$

Сила давления блока на ось

$$F = 2T = \frac{4m_1 m_2}{m_1+m_2}(g+a_0).$$

Вычисляя, получаем $F = 19$ Н.

Задачи

1.171. Определить период обращения вокруг Солнца искусственной планеты, если известно, что большая полуось ее эллиптической орбиты больше на 10^7 км большой полуоси земной орбиты. [13,2 мес]

1.172. Период обращения кометы Галлея вокруг Солнца $T = 76$ лет. Минимальное расстояние, на котором она проходит от Солнца, составляет 180 Мм. Определить максимальное расстояние, на которое комета Галлея удаляется от Солнца. Радиус орбиты Земли $R_0 = 150$ Мм. [$5{,}2 \cdot 10^9$ км]

1.173. Считая орбиту Земли круговой, определить линейную скорость v движения Земли вокруг Солнца. [29,8 км/с]

1.174. Период обращения искусственного спутника Земли составляет 3 ч. Считая его орбиту круговой, определить, на какой высоте от поверхности Земли находится спутник. [4,19 Мм]

1.175. Планета массой M движется по окружности вокруг Солнца со скоростью v (относительно гелиоцентрической системы отсчета). Определить период обращения этой планеты вокруг Солнца. [$T = 2\pi GM/v^3$]

1.176. Определить, во сколько раз сила притяжения на Земле больше силы притяжения на Марсе, если радиус Марса составляет 0,53 радиуса Земли, а масса Марса — 0,11 массы Земли. [В 2,55 раза]

1.177. Определить среднюю плотность Земли, если известна гравитационная постоянная. [5,51 г/см^3]

1.178. Две материальные точки массами m_1 и m_2 расположены друг от друга на расстоянии R. Определить угловую скорость вращения, с которой они должны вращаться вокруг общего центра масс, чтобы расстояние между ними осталось постоянным. $\left[\omega = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{R^3}}\right]$

1.179. Два одинаковых однородных шара из одинакового материала, соприкасаясь друг с другом, притягиваются. Определить, как изменится сила притяжения, если массу шаров увеличить в $n = 3$ раза. [Возрастет в 4,33 раза]

1.180. Определить высоту, на которой ускорение свободного падения составляет 25 % от ускорения свободного падения на поверхности Земли. [$h = R$, R — радиус Земли]

1.181. Считая плотность Земли постоянной, определить глубину, на которой ускорение свободного падения составляет 25 % от ускорения свободного падения на поверхности Земли. [$h = 0{,}75R$, R — радиус Земли]

1.182. На какой высоте h ускорение силы тяжести вдвое меньше его значения на поверхности Земли? [$h = 26{,}1$ Мм]

1.183. Стационарным искусственным спутником Земли называется спутник, находящийся постоянно над одной и той же точкой экватора. Определить расстояние такого спутника до центра Земли. [$4{,}2 \cdot 10^4$ км]

1.184. На экваторе некоторой планеты (плотность планеты $\rho = 3$ г/см^3) тела весят в два раза меньше, чем на полюсе. Определить период обращения планеты вокруг собственной оси. [2,74 ч]

1.185. Принимая, что радиус Земли известен, определить, на какой высоте h над поверхностью Земли напряженность поля тяготения равна 4,9 Н/кг. [2,64 Мм]

1.186. Определить, в какой точке (считается от Земли) на прямой, соединяющей центры Земли и Луны, напряженность поля тяготения равна нулю. Расстояние между центрами Земли и Луны равно R, масса Земли в 81 раз больше массы Луны. [0,9 R]

1.187. Имеется тонкий однородный стержень массой m и длиной l. Для точки, находящейся на одной прямой со стержнем на расстоянии a от его ближайшего конца, определить: 1) потенциал гравитационного поля стержня; 2) напряженность его гравитационного поля. $\left[1)\ \varphi = -G\frac{m}{l}\ln\frac{a+l}{a};\ 2)\ \mathbf{g} = G\frac{m}{a(l+a)}\mathbf{i}, \mathbf{i}\right.$ — единичный вектор]

1.188. Тонкий однородный диск радиусом R имеет массу m. Определить в точке A, расположенной на оси диска на расстоянии h от него: 1) потенциал гравитационного поля; 2) напряженность гравитационного поля.

$$\left[1)\ \varphi = -G\frac{2m}{R^2}\left[\sqrt{h^2+R^2}-h\right]; \right.$$

$$\left. 2)\ \mathbf{g} = G\frac{2m}{R^2}\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right)\mathbf{i},\ \mathbf{i} \text{ — единичный вектор} \right]$$

1.189. Принимая потенциальную энергию на бесконечно большом расстоянии равной нулю, определить зависимость потенциальной энергии тела массой m от расстояния R до центра Земли. [$\Pi(R) = -mgR_0^2/R$, где R_0 — радиус Земли]

1.190. Как известно, искусственный спутник Земли движется вокруг нее по круговой орбите. Определить, во сколько раз гравитационная потенциальная энергия спутника больше его кинетической энергии. [В 2 раза]

1.191. Два алюминиевых шарика ($\rho = 2{,}7$ г/см^3) радиусами $r_1 = 3$ см и $r_2 = 5$ см соприкасаются друг с другом. Определить потенциальную энергию их гравитационного взаимодействия. [—0,36 нДж]

1.192. Два одинаковых однородных шара из одинакового материала соприкасаются друг с другом. Определить, как изменится потенциальная энергия их гравитационного взаимодействия, если массу шаров увеличить в $n = 3$ раза. [Возрастет в 6,24 раза]

1.193. Принимая, что атмосфера на Луне отсутствует, определить скорость падения метеорита на ее поверхность. Скорость метеорита вдали от Луны считать малой. [2,37 км/с]

1.194. Спутник поднимают на высоту $h = 6370$ км и запускают его по круговой орбите на той же высоте. Определить отношение работ на поднятие (A_1) и на запуск (A_2) спутника. [$A_1/A_2 = 2$]

1.195. Определить числовое значение первой космической скорости, т. е. горизонтально направленной минимальной скорости, которую надо сообщить телу, чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала круговой (тело могло превратиться в искусственный спутник Земли). [$v_1 = 7{,}9$ км/с]

1.196. Определить числовое значение второй космической скорости, т. е. наименьшей скорости, которую надо сообщить телу, чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической (тело могло превратиться в спутник Солнца). [$v_2 = 11{,}2$ км/с]

1.197. Определить числовое значение второй космической скорости для Луны. [2,37 км/с]

1.198. Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите на высоте $h = 500$ км. Определить скорость его движения. [7,62 км/с]

1.199. Два спутника с одинаковой массой движутся вокруг Земли по круговым орбитам разных радиусов R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$). Определить: 1) отношение кинетической энергии второго спутника к первому; 2) как зависят от радиуса орбиты потенциальная и полная энергии спутников. [1) R_1/R_2; 2) возрастают с удалением от Земли]

1.200. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы тело массой $m = 1000$ кг, находящееся на Земле, смогло превратиться в спутник Солнца (при отсутствии сопротивления среды). [62,6 ГДж]

1.201. К потолку вагона, движущегося в горизонтальном направлении с ускорением $a = 9{,}81$ м/с^2, подвешен на нити шарик массой $m = 200$ г. Определить для установившегося движения: 1) силу натяжения нити T; 2) угол φ отклонения нити от вертикали. [1) 2,77 Н; 2) 45°]

1.202. Вагон под действием силы тяжести катится вдоль дороги, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Сила трения составляет $\eta = 10\,\%$ от веса вагона. К потолку вагона на нити подвешен шарик массой $m = 15$ г. Определить: 1) силу F, действующую на нить; 2) угол φ отклонения нити от вертикали. [1) 0,13 Н; 2) 23,1°]

1.203. Вагон под действием силы тяжести катится вдоль дороги, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, а затем переходящей в горизонтальный участок. Силы трения на обоих участках составляют 10 % от веса вагона. К потолку вагона на нити подвешен шарик массой $m = 15$ г. Определить силу F, действующую на нить, и угол φ отклонения нити от вертикали на: 1) наклонном; 2) горизонтальном участках дороги. [1) 0,128 Н; 23°28′; 2) 0,148 Н; 5°43′]

1.204. На наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ (рис. 30) лежит тело. Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью $f = 0{,}2$. Определить наименьшее горизонтально направленное ускорение a, с которым должна двигаться наклонная плоскость, чтобы тело, лежащее на ней, поднималось по наклонной плоскости. $\left[a = \dfrac{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = 8{,}62 \text{ м/с}^2 \right]$

1.205. Самолет, летящий со скоростью $v = 360$ км/ч, опи-

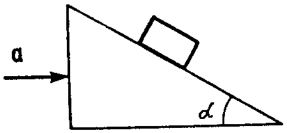


Рис. 30

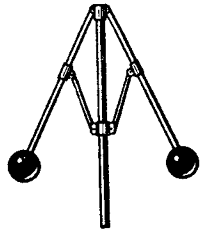


Рис. 31

сывает вертикальную петлю Нестерова радиусом $R = 360$ м. Определить силу, прижимающую летчика ($m = 80$ кг) к сиденью: 1) в нижней точке этой петли; 2) в верхней точке этой петли. [1) 3 кН; 2) 1,44 кН]

1.206. Модель центробежного регулятора (рис. 31) вращается с частотой $n = 2\ \text{с}^{-1}$. Учитывая только массу шаров, определить угол отклонения стержней, несущих шары. Длина стержней $l = 15$ см. [65,5°]

1.207. Определить, во сколько раз ускорение a_1, обусловленное центробежной силой на экваторе Земли, меньше ускорения a_2, вызываемого силой тяготения на поверхности Земли. [В 292 раза]

1.208. Мотоциклист в цирке едет вдоль внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом $r = 15$ м. Центр масс мотоцикла с человеком отстоит на $h = 1$ м от места соприкосновения колес со стенкой. Коэффициент трения шин о стенки $f = 0{,}5$. Определить: 1) минимальную скорость $v_{\text{мин}}$, с которой должен ехать мотоциклист; 2) угол α наклона мотоциклиста к горизонтальной поверхности при данной минимальной скорости. [1) 17,1 м/с; 2) 26°34′]

1.209. Тело массой $m = 1$ кг, падая свободно в течение $t = 4$ с, попадает на Землю в точку с географической широтой $\varphi = 45°$. Учитывая вращение Земли, определить и нарисовать все силы, действующие на тело в момент его падения на Землю. [Сила тяготения $F = 9{,}83$ Н; центробежная сила инерции $F_{\text{ц и}} = 23{,}8$ мН; сила Кориолиса $F_{\text{К}} = 4{,}04$ мН]

1.210. Тело массой $m = 1$ кг, падая свободно в течение $\tau = 6$ с, попадает на Землю в точку с географической широтой $\varphi = 30°$. Учитывая вращение Земли, определить отклонение тела при его падении от вертикали. [4,45 см]

1.6. Элементы механики жидкостей

Основные законы и формулы

- Гидростатическое давление столба жидкости на глубине h

$$p = \rho g h,$$

где ρ — плотность жидкости.

- Закон Архимеда

$$F_{\text{А}} = \rho g V,$$

где $F_{\text{А}}$ — выталкивающая сила; V — объем вытесненной жидкости.

- Уравнение неразрывности

$$Sv = \text{const},$$

где S — площадь поперечного сечения трубки тока; v — скорость жидкости.

- Уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const},$$

где p — статическое давление жидкости для определенного сечения трубки тока; v — скорость жидкости для этого же сечения; $\rho v^2/2$ — динамическое давление жидкости для этого же сечения; h — высота, на которой расположено сечение; $\rho g h$ — гидростатическое давление.

Для трубки тока, расположенной горизонтально,

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}.$$

- Формула Торричелли, позволяющая определить скорость истечения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде,

$$v = \sqrt{2gh},$$

где h — глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости в сосуде.

- Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S,$$

где η — динамическая вязкость жидкости; $\Delta v/\Delta x$ — градиент скорости; S — площадь соприкасающихся слоев.

Число Рейнольдса, определяющее характер движения жидкости,

$$\text{Re} = \rho \langle v \rangle d/\eta,$$

где ρ — плотность жидкости; $\langle v \rangle$ — средняя по сечению трубы скорость жидкости; d — характерный линейный размер, например диаметр трубы.

● Формула Стокса, позволяющая определить силу сопротивления, действующую на медленно движущийся в вязкой среде шарик,

$$F = 6\pi\eta r v,$$

где r — радиус шарика; v — его скорость.

● Формула Пуазейля, позволяющая определить объем жидкости, протекающий за время t через капиллярную трубку длиной l,

$$V = \pi R^4 \Delta p t/(8\eta l),$$

где R — радиус трубки; Δp — разность давлений на концах трубки.

● Лобовое сопротивление

$$R_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S,$$

где C_x — безразмерный коэффициент сопротивления; ρ — плотность среды; v — скорость движения тела; S — площадь наибольшего поперечного сечения тела.

● Подъемная сила

$$R_y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S,$$

где C_y — безразмерный коэффициент подъемной силы.

Примеры решения задач

Задача 12. Водомер представляет собой горизонтальную трубу переменного сечения, в которую впаяны две вертикальные манометрические трубки одинакового сечения (рис. 32). По трубе протекает вода. Пренебрегая вязкостью воды, определить ее массовый расход, если разность уровней в манометрических трубках $\Delta h = 8$ см, а сечения трубы у оснований манометрических трубок соответственно равны $S_1 = 6\ см^2$ и $S_2 = 12\ см^2$. Плотность воды $\rho = 1\ г/см^3$.

Дано: $\Delta h = 8\ см = 0{,}08\ м$, $S_1 = 6\ см^2 = 6 \cdot 10^{-4}\ м^2$, $S_2 = 12\ см^2 = 12 \cdot 10^{-4}\ м^2$, $\rho = 1\ г/см^3 = 10^3\ кг/м^3$.

Определить Q.

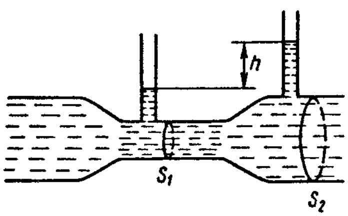


Рис. 32

Решение. Массовый расход воды — это масса воды, протекающая через сечение за единицу времени,

$$Q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho v_2 S_2 \Delta t}{\Delta t} = \rho v_2 S_2, \tag{1}$$

где ρ — плотность воды; v_2 — скорость течения воды в месте сечения S_2. При стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости выполняются уравнение неразрывности

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \tag{2}$$

и уравнение Бернулли для горизонтальной трубы ($h_1 = h_2$)

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}, \tag{3}$$

где p_1 и p_2 — статические давления в сечениях манометрических трубок; v_1 и v_2 — скорости течения воды в местах сечений S_1 и S_2. Учитывая, что

$$p_2 - p_1 = \rho g \Delta h,$$

и решая систему уравнений (2), (3), получаем

$$v_2 = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}.$$

Подставив это выражение в (1), найдем искомый массовый расход воды:

$$Q = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}.$$

Вычисляя, получаем $Q = 0{,}868$ кг/с.

Задача 13. Стальной шарик (плотность $\rho_1 = 9\ г/см^3$) падает с постоянной скоростью в сосуде с глицерином ($\rho_2 = 1{,}26\ г/см^3$, динамическая вязкость $\eta = 1{,}48$ Па·с). Считая, что при числе Рейнольдса $Re \leqslant 0{,}5$ выполняется закон Стокса, определить предельный диаметр шарика.

Дано: $v = \text{const}$, $\rho_1 = 9\ г/см^3 = 9000\ кг/м^3$, $\rho_2 = 1{,}26\ г/см^3 = 1260\ кг/м^3$, $\eta = 1{,}48$ Па·с, $Re \leqslant 0{,}5$.

Определить d_{max}.

Решение. При установившемся движении шарика в жидкости ($v = \text{const}$) сила тяжести (P) шарика уравновешивается суммой выталкивающей силы (F_A) и силы внутреннего трения (F):

$$P = F_A + F \quad \text{или} \quad \rho_1 g V = \rho_2 g V + 6\pi\eta r v, \tag{1}$$

где V — объем шарика. Подставив в уравнение (1) $V = {}^4/_3 \pi r^3$ и решив его относительно v, получим

$$v = \frac{2(\rho_1 - \rho_2) g r^2}{9\eta} = \frac{(\rho_1 - \rho_2) g d^2}{18\eta}.$$

Для шара небольшого радиуса, движущегося в вязкой жидкости, число Рейнольдса $Re = \rho_2 v d/\eta$, откуда

$$d_{\max} = \frac{\eta \mathrm{Re}_{\text{кр}}}{\rho_2 v} = \sqrt[3]{\frac{18\eta^2 \mathrm{Re}_{\text{кр}}}{(\rho_1 - \rho_2)\rho_2 g}}.$$

Вычисляя, получаем $d_{\max} = 5{,}91$ мм.

Задачи

1.211. Полый медный шар ($\rho = 8{,}93$ г/см^3) весит в воздухе 3 Н, а в воде ($\rho' = 1$ г/см^3) — 2 Н. Пренебрегая выталкивающей силой воздуха, определить объем внутренней полости шара. [68 мм^3].

1.212. На столе стоит цилиндрический сосуд, наполненный водой до уровня $H = 20$ см от дна. Если в воду ($\rho = 1$ г/см^3) опустить плавать тонкостенный никелевый стакан ($\rho' = 8{,}8$ г/см^3), то уровень воды подымается на $h = 2{,}2$ см. Определить уровень H_1 воды в сосуде, если стакан утопить. [20,2 см].

1.213. По трубе радиусом $r = 1{,}5$ см течет углекислый газ ($\rho = 7{,}5$ кг/м^3). Определить скорость его течения, если за $t = 20$ мин через поперечное сечение трубы протекает $m = 950$ г газа. [0,15 м/с]

1.214. В бочку заливается вода со скоростью 200 см^3/с. На дне бочки образовалось отверстие площадью поперечного сечения 0,8 см^2. Пренебрегая вязкостью воды, определить уровень воды в бочке. [31,9 см]

1.215. В сосуд заливается вода со скоростью 0,5 л/с. Пренебрегая вязкостью воды, определить диаметр отверстия в сосуде, при котором вода поддерживалась бы в нем на постоянном уровне $h = 20$ см. [1,8 см]

1.216. Бак цилиндрической формы площадью основания 10 м^2 и объемом 100 м^3 заполнен водой. Пренебрегая вязкостью воды, определить время, необходимое для полного опустошения бака, если на дне бака образовалось круглое отверстие площадью 8 см^2. [$1{,}78 \times 10^4$ с]

1.217. Сосуд в виде полусферы радиусом $R = 10$ см (рис. 33) до краев наполнен водой. На дне сосуда имеется отверстие площадью поперечного сечения $S = 4$ мм^2. Определить время, за которое через это отверстие выльется столько воды, чтобы ее уровень в сосуде понизился на 5 см. [10 мин]

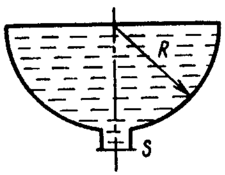


Рис. 33

1.218. Определить работу, которая затрачивается на преодоление трения при перемещении воды объемом $V = 1{,}5$ м^3 в горизонтальной трубе от сечения с давлением $p_1 = 40$ кПа до сечения с давлением $p_2 = 20$ кПа. [30 кДж]

1.219. В дне сосуда имеется отверстие диаметром d_1. В сосуде вода поддерживается на постоянном уровне, равном h. Считая, что струя не разбрызгивается, и пренебрегая силами трения в жидкости, определить диаметр струи, вытекающей из сосуда на расстоянии $h_1 = 2h$ от его дна. [0,76 d_1]

Рис. 34

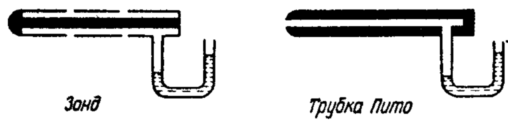


Рис. 35

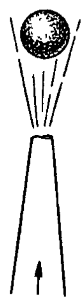


Рис. 36

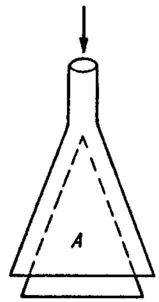


Рис. 37

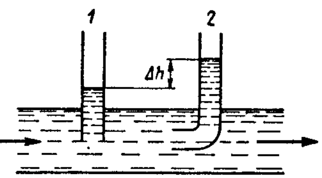


Рис. 38

1.220. Площадь поршня, вставленного в горизонтально расположенный налитый водой цилиндр (рис. 34), $S_1 = 1{,}5$ см^2, а площадь отверстия $S_2 = 0{,}8$ мм^2. Пренебрегая трением и вязкостью, определить время t, за которое вытечет вода из цилиндра, если на поршень действовать постоянной силой $F = 5$ Н, а ход поршня $l = 5$ см. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. [1,15 с]

1.221. Для измерения статического давления p используется зонд, для измерения динамического давления $\rho v^2/2$ используется трубка Пито (рис. 35). Нарисуйте, как должен выглядеть прибор, который измеряет гидростатическое давление.

1.222. Объяснить, почему легкий шарик, помещенный в струю воздуха (рис. 36), выходящую с большой скоростью из трубы с узким отверстием, свободно парит в этой струе.

1.223. Объяснить, почему бумажный конус A (рис. 37) втягивается в воронку, а не выталкивается из нее при продувании через воронку воздуха в направлении, указанном стрелкой.

1.224. Для точного измерения малых разностей давления служат U-образные манометры, которые заполнены двумя различными жидкостями. В одном из них при использовании нитробензола ($\rho = 1{,}203$ г/см^3) и воды ($\rho' = 1{,}000$ г/см^3) получили разность уровней $\Delta h =$ $= 26$ мм. Определить разность давлений. [51,8 Па]

1.225. По горизонтальной трубе в направлении, указанном на рис. 38 стрелкой, течет жидкость. Разность уровней в манометрических трубках *1* и *2* одина- Δh жидкости кового диаметра составляет 8 см. Определить скорость течения жидкости по трубе. [1,25 м/с]

1.226. По горизонтальной трубе переменного сечения (рис. 39) течет вода. Площади поперечных сечений трубы на разных ее участках соответственно равны $S_1 = 10$ см^2 и $S_2 = 20$ см^2. Разность уровней Δh воды в вертикальных трубках одинакового сечения составляет 20 см. Определить объем воды, проходящей за 1 с через сечение трубы. [$2{,}29 \cdot 10^3$ см^3]

1.227. Определить, на какую высоту h поднимется вода в горизонтальной трубке (рис. 40), впаянной в узкую часть горизонтальной трубы диаметром $d_2 = 3$ см, если в широкой части трубы диаметром $d_1 = 9$ см скорость воды $v_1 = 25$ см/с. [25,5 см]

1.228. Определить разность давлений в широком и узком ($d_1 = 9$ см, $d_2 = 6$ см) коленах горизонтальной трубы (рис. 40), если вода ($\rho = 1000$ кг/м^3) в широком колене течет со скоростью $v_1 = 6$ м/с. [73,1 кПа]

1.229. Вдоль оси горизонтальной трубки диаметром 3 см, по которой течет углекислый газ ($\rho = 7{,}5$ кг/м^3), установлена трубка Пито (рис. 41). Пренебрегая вязкостью, определить объем газа, проходящего за 1 с через сечение трубы, если разность уровней в жидкостном манометре составляет $\Delta h = 0{,}5$ см. Плотность жидкости принять равной $\rho' = 1000$ кг/м^3.
[$2{,}55 \cdot 10^3$ см^3]

1.230. Через трубку сечением $S_1 = 100$ см^2 (рис. 42) продувается воздух со скоростью 2 м^3/мин. В трубке имеется короткий участок с меньшим поперечным сечением $S_2 = 20$ см^2. Определить: 1) скорость v_1 воздуха в широкой части трубки; 2) разность уровней Δh воды, используемой в подсоединенном к данной системе манометре. Плотность воздуха $\rho = 1{,}3$ кг/м^3, воды $\rho' =$ $= 1000$ кг/м^3. [1) 3,33 м/с; 2) 1,8 см]

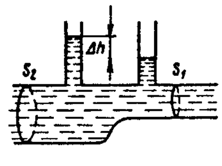


Рис. 39

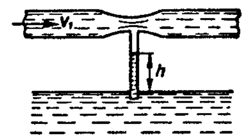


Рис. 40

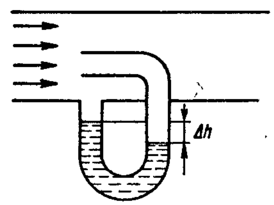


Рис. 41

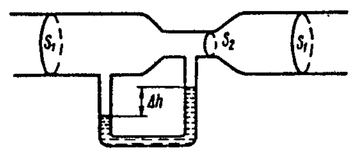


Рис. 42

1.231. Пренебрегая вязкостью жидкости, определить скорость истечения жидкости из малого отверстия в стенке сосуда, если высота h уровня жидкости над отверстием составляет 1,5 м. [5,42 м/с]

1.232. В боковой поверхности цилиндрического сосуда, стоящего на горизонтальной поверхности, имеется отверстие, поперечное сечение которого значительно меньше поперечного сечения самого сосуда. Отверстие расположено на расстоянии $h_1 = 49$ см от уровня воды в сосуде, который поддерживается постоянным, и на расстоянии $h_2 = 25$ см от дна сосуда. Пренебрегая вязкостью воды, определить расстояние по горизонтали от отверстия до места, куда попадает струя воды. [70 см]

1.233. На столе стоит наполненный водой широкий цилин-

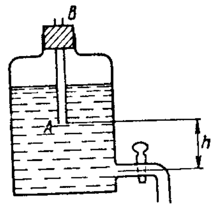


Рис. 43

дрический сосуд высотой $h = 40$ см. Пренебрегая вязкостью, определить, на какой высоте от дна сосуда должно располагаться небольшое отверстие, чтобы расстояние по горизонтали от отверстия до места, куда попадает струя воды, было максимальным. [20 см]

1.234. Для вытекания струи жидкости из сосуда с постоянной скоростью применяют устройство, приведенное на рис. 43 (сосуд Мариотта). Определить скорость истечения струи. [Пока уровень жидкости в сосуде выше нижнего конца трубки AB, скорость $v=\sqrt{2gh}$. После этого скорость истечения начнет уменьшаться]

1.235. Площадь соприкосновения слоев текущей жидкости $S = 10\ \text{см}^2$, коэффициент динамической вязкости жидкости $\eta = 10^{-3}$ Па·с, а возникающая сила трения между слоями $F = 0{,}1$ мН. Определить градиент скорости. [$100\ \text{с}^{-1}$]

1.236. Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в три раза больше плотности материала шарика. Определить отношение силы трения, действующей на всплывающий шарик, к его весу. [2]

1.237. Смесь свинцовых дробинок (плотность $\rho = 11{,}3\ \text{г/см}^3$) диаметром 4 мм и 2 мм одновременно опускают в широкий сосуд глубиной $h = 1{,}5$ м с глицерином (плотность $\rho = 1{,}26\ \text{г/см}^3$, динамическая вязкость $\eta = 1{,}48$ Па·с. Определить, на сколько больше времени потребуется дробинкам меньшего размера, чтобы достичь дна сосуда. [На 76,1 с]

1.238. В широком сосуде, наполненном глицерином (плотность $\rho = 1{,}26\ \text{г/см}^3$, динамическая вязкость $\eta = 1{,}48$ Па·с, падает свинцовый шарик (плотность $\rho = 11{,}3\ \text{г/см}^3$). Считая, что при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} \leqslant 0{,}5$ выполняется закон Стокса (при вычислении Re в качестве характерного размера берется диаметр шарика), определить предельный диаметр шарика [5,41 мм]

1.239. Стальной шарик (плотность $\rho' = 9\ \text{г/см}^3$) диаметром $d = 0{,}8$ см падает с постоянной скоростью в касторовом масле ($\rho = 0{,}96\ \text{г/см}^3$, динамическая вязкость $\eta = 0{,}99$ Па·с. Учитывая, что критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 0{,}5$, определить характер движения масла, обусловленный падением в нем шарика. [$\mathrm{Re} = 2{,}2 > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$, движение турбулентное]

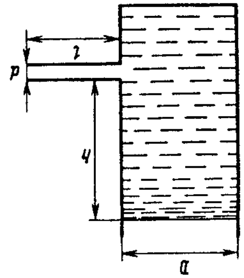


Рис. 44

1.240. Пробковый шарик (плотность $\rho = 0{,}2\ \text{г/см}^3$) диаметром $d = 6$ мм всплывает в сосуде, наполненном касторовым маслом ($\rho = 0{,}96\ \text{г/см}^3$), с постоянной скоростью $v = 1{,}5$ см/с. Определить для касторового масла: 1) динамическую вязкость η; 2) кинематическую вязкость ν.
[1) 0,99 Па·с; 2) $1{,}03\cdot10^{-3}\ \text{м}^2/\text{с}$]

1.241. В боковую поверхность сосуда вставлен горизонтальный капилляр внутренним диаметром $d = 2$ мм и длиной $l = 1{,}2$ см. Через капилляр вытекает касторовое масло (плотность $\rho = 0{,}96\ \text{г/см}^3$, динамическая вязкость $\eta = 0{,}99$ Па·с, уровень которого в сосуде поддерживается постоянным на высоте $h = 30$ см выше капилляра. Определить время, которое требуется для протекания через капилляр $10\ \text{см}^3$ масла. [107 с]

1.242. В боковую поверхность цилиндрического сосуда диаметром D вставлен капилляр внутренним диаметром d и длиной l (рис. 44). В сосуд налита жидкость с динамической вязкостью η. Определить зависимость скорости v понижения уровня жидкости в сосуде от высоты h этого уровня над капилляром.

$$\left[\ v = \frac{1}{32}\,\frac{\rho g h d^4}{\eta l D^2}\ \right]$$

1.243. В боковую поверхность цилиндрического сосуда, установленного на столе, вставлен на высоте $h_1 = 10$ см от его дна капилляр внутренним диаметром $d = 2$ мм и длиной $l = 1$ см. В сосуде поддерживается постоянный уровень машинного масла (плотность $\rho = 0{,}9\ \text{г/см}^3$ и динамическая вязкость $\eta = 0{,}1$ Па·с на высоте $h_2 = 70$ см выше капилляра. Определить расстояние по горизонтали от конца капилляра до места, куда попадает струя масла. [11 см]

1.244. Определить наибольшую скорость, которую может приобрести свободно падающий в воздухе ($\rho = 1{,}29\ \text{кг/м}^3$) свинцовый шарик ($\rho' = 11{,}3\ \text{г/см}^3$) массой $m = 12$ г. Коэффициент C_x принять равным 0,5. [77,6 м/с]

1.245. Парашют ($m_1 = 32$ кг) пилота ($m_2 = 65$ кг) в раскрытом состоянии имеет форму полусферы диаметром $d = 12$ м, обладая коэффициентом сопротивления $C_x = 1{,}3$. Определить максимальную скорость, развиваемую пилотом, при плотности воздуха 1,29 кг/м³. [3,17 м/с]

1.246. Автомобиль с площадью миделя (наибольшая площадь сечения в направлении, перпендикулярном скорости) $S = 2{,}2$ м², коэффициентом лобового сопротивления $C_x = 0{,}4$ и максимальной мощностью $P = 45$ кВт может на горизонтальных участках дороги развивать скорость до 140 км/ч. При реконструкции автомобиля уменьшают площадь миделя до $S_1 = 2$ м², оставляя C_x прежним. Принимая силу трения о поверхность дороги постоянной, определить, какую максимальную мощность должен иметь автомобиль, чтобы он развивал на горизонтальных участках дороги скорость до 160 км/ч. Плотность воздуха принять равной 1,29 кг/м³. [58,5 кВт]

1.247. Объяснить, зависит ли разность давлений на нижнюю и верхнюю поверхность крыла самолета от высоты его подъема.

1.7. Элементы специальной (частной) теории относительности

Основные законы и формулы

● Преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где предполагается, что система отсчета K' движется со скоростью v в положительном направлении оси x системы отсчета K, причем оси x' и x совпадают, а оси y' и y и z' и z параллельны; c — скорость распространения света в вакууме.

● Релятивистское замедление хода часов

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

де τ — промежуток времени между двумя событиями, отсчитанный движущимися вместе с телом часами; τ' — промежуток времени между теми же событиями, отсчитанный покоящимися часами.

● Релятивистское (лоренцево) сокращение длины

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

где l_0 — длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень покоится (собственная длина); l — длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой он движется со скоростью v

● Релятивистский закон сложения скоростей

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2},$$

где предполагается, что система отсчета K' движется со скоростью v в положительном направлении оси x системы отсчета K, причем оси x' и x совпадают, оси y' и y, z' и z параллельны.

● Интервал s_{12} между событиями (инвариантная величина)

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \mathrm{inv},$$

где t_{12} — промежуток времени между событиями *1* и *2*; l_{12} — расстояние между точками, где произошли события.

● Масса релятивистской частицы и релятивистский импульс

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m_0 — масса покоя.

● Основной закон релятивистской динамики

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

где $\mathbf{p}$ — релятивистский импульс частицы.

● Полная и кинетическая энергии релятивистской частицы

$$E = mc^2 = m_0c^2 + T, \quad T = (m - m_0)c^2.$$

● Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2, \quad pc = \sqrt{T(T + 2m_0c^2)}$$

● Энергия связи системы

$$E_{\text{св}} = \sum_{i=1}^{n} m_{0i}c^2 - M_0c^2,$$

где m_{0i} — масса покоя i-й частицы в свободном состоянии, M_0 — масса покоя системы, состоящей из n частиц.

Примеры решения задач

Задача 14. Энергия π-мезона, возникающего в верхних слоях атмосферы, составляет 6 ГэВ, а его среднее время жизни в связанной с ним системе отсчета равно 26 нс. Принимая массу π-мезона равной $273m_e$, определить время его жизни в лабораторной системе отсчета.

Дано: $E = 6$ ГэВ $= 9{,}6 \cdot 10^{-10}$ Дж, $\tau = 26$ нс $= 2{,}6 \times \times 10^{-8}$ с, $m_0 = 273\ m_e$, $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Определить τ'.

Решение. Согласно следствию из преобразований Лоренца для времени и закону взаимосвязи массы и энергии,

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{1}$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2}$$

Из формулы (2) следует, что

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = m_0 c^2/E. \tag{3}$$

Тогда из выражений (1) и (3) искомое время жизни π-мезона в лабораторной системе отсчета

$$\tau' = \frac{\tau E}{m_0 c^2}.$$

Вычисляя, получим $\tau' = 1{,}11$ мкс.

Задача 15. Определить, какая кинетическая энергия должна быть сообщена ракете массой $m_0 = 1{,}5$ т, чтобы она приобрела скорость $v = 120$ Мм/с.

Дано: $m_0 = 1{,}5$ т $= 1{,}5 \cdot 10^3$ кг, $v = 120$ Мм/с $= 1{,}2 \times \times 10^8$ м/с.

Определить T.

Решение. Кинетическая энергия ракеты

$$T = (m - m_0)c^2,$$

где $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Из этих выражений получаем, что

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

Вычисляя, получаем $T = 1{,}23 \cdot 10^{19}$ Дж.

Задача 16. Ионизованный атом, вылетев из ускорителя со скоростью $0{,}85\ c$, испустил фотон в направлении своего движения. Определить скорость фотона относительно ускорителя.

Дано $u' = 0{,}85\ c$.

Определить u.

Решение. Согласно релятивистскому закону сложения скоростей,

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2},$$

где $v = c$ — скорость фотона. Подставив сюда значение $u' = 0{,}85\ c$, получим $u = c$, т. е. скорость фотона в собственной системе отсчета и относительно ускорителя одинакова и равна c.

Задачи

1.248. Показать, что события, происходящие одновременно в различных точках в одной инерциальной системе отсчета, не одновременны в другой инерциальной системе отсчета.

1.249. В лабораторной системе отсчета в точках с координатами x_1 и $x_2 = x_1 + l_0$ одновременно происходят события *1* и *2*, причем $l_0 = 1{,}4$ км. Определить: 1) расстояние l', фиксируемое наблюдателем в системе отсчета, связанной с ракетой, которая движется со скоростью $v = 0{,}6\ c$ в отрицательном направлении оси x; 2) время между этими событиями, фиксируемое наблюдателем в системе отсчета, связанной с ракетой. [$l' = 1{,}75$ км, $\tau = t_2' - t_1' = 3{,}5$ мкс]

1.250. Две нестабильные частицы движутся в системе отсчета K в одном направлении вдоль одной прямой с одинаковой скоростью $v = 0{,}6\,c$. Расстояние между частицами в системе K равно 64 м. Обе частицы распались одновременно в системе K', которая связана с ними. Определить промежуток времени между распадом частиц в системе K. [0,2 мкс]

1.251. Доказать, что длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна.

1.252. Определить, во сколько раз увеличивается время жизни нестабильной частицы (по часам неподвижного наблюдателя), если она начинает двигаться со скоростью, равной $0{,}9\ c$. [В 2,29 раза]

1.253. Собственное время жизни частицы отличается на 1 % от времени жизни по неподвижным часам. Определить $\beta = v/c$. [0,141]

1.254. Космический корабль движется со скоростью $v = 0{,}8\ c$ по направлению к Земле. Определить расстояние, пройденное им в системе отсчета, связанной с

Землей (системе K), за $t_0 = 0{,}5$ c, отсчитанное по часам в космическом корабле (системе K'). [200 Мм]

1.255. Мюоны, рождаясь в верхних слоях атмосферы, при скорости $v = 0{,}995$ c пролетают до распада $l = 6$ км. Определить: 1) собственную длину пути, пройденную ими до распада; 2) время жизни мюона для наблюдателя на Земле; 3) собственное время жизни мюона. [1) 599 м; 2) 20,1 мкс; 3) 2 мкс]

1.256. Доказать, что линейные размеры тела наибольшие в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело покоится.

1.257. Определить относительную скорость движения, при которой релятивистское сокращение линейных размеров тела составляет 10 %. [$1{,}31 \cdot 10^5$ км/с]

1.258. В системе K' покоится стержень (собственная длина $l_0 = 1{,}5$ м), ориентированный под углом $\vartheta' = 30°$ к оси Ox'. Система K' движется относительно системы K со скоростью $v = 0{,}6\,c$. Определить в системе K: 1) длину стержня l; 2) соответствующий угол ϑ. [1) 1,28 м; 2) 35°48′]

1.259. Определить собственную длину стержня, если в лабораторной системе его скорость $v = 0{,}6\,c$, длина $l = 1{,}5$ м и угол между ним и направлением движения $\vartheta = 30°$. [1,79 м]

1.260. Пользуясь преобразованиями Лоренца, вывести релятивистский закон сложения скоростей, если переход происходит от системы K к системе K'.

1.261. Космический корабль удаляется от Земли с относительной скоростью $v_1 = 0{,}8\,c$, а затем с него стартует ракета (в направлении от Земли) со скоростью $v_2 = 0{,}8\,c$ относительно корабля. Определить скорость u ракеты относительно Земли. [0,976 c]

1.262. Ионизованный атом, вылетев из ускорителя со скоростью $0{,}8\,c$, испустил фотон в направлении своего движения. Определить скорость фотона относительно ускорителя. [c]

1.263. Две ракеты движутся навстречу друг другу относительно неподвижного наблюдателя с одинаковой скоростью, равной $0{,}5\,c$. Определить скорость сближения ракет, исходя из закона сложения скоростей: 1) в классической механике; 2) в специальной теории относительности. [1) c; 2) 0,8 c]

1.264. Релятивистская частица движется в системе K со скоростью $\mathbf{u}$ под углом ϑ к оси x. Определить соответствующий угол в системе K', движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно системы K в положительном направлении оси x, если оси x и x' обеих систем совпадают. $\left[\operatorname{tg} \vartheta' = \dfrac{\sin \vartheta \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\cos \vartheta - v/u} \right]$

1.265. Доказать, что интервал между двумя событиями является величиной инвариантной, т. е. имеет одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета.

1.266. Воспользовавшись тем, что интервал является инвариантной величиной по отношению к преобразованиям координат, определить расстояние, которое пролетел π-мезон с момента рождения до распада, если время его жизни в этой системе отсчета $\Delta t = 4{,}4$ мкс, а собственное время жизни $\Delta t_0 = 2{,}2$ мкс. [1,14 км]

1.267. Частица движется со скоростью $v = 0{,}8\,c$. Определить отношение массы релятивистской частицы к ее массе покоя. [1,67]

1.268. Определить, на сколько процентов масса релятивистской элементарной частицы, вылетающей из ускорителя со скоростью $v = 0{,}75\,c$, больше ее массы покоя. [На 51,2 %]

1.269. Определить скорость движения релятивистской частицы, если ее масса в два раза больше массы покоя. [0,866 c]

1.270. Определить релятивистский импульс протона, если скорость его движения $v = 0{,}8\,c$. [$6{,}68 \cdot 10^{-19}$ кг·м/с]

1.271. Определить скорость, при которой релятивистский импульс частицы превышает ее ньютоновский импульс в $n = 3$ раза. [0,943 c]

1.272. Определить зависимость скорости частицы (масса покоя m_0) от времени, если движение одномерное, сила постоянна и уравнение движения релятивистское. $\left[v(t) = \dfrac{Ft/m_0}{\sqrt{1 + (Ft/m_0c)^2}} \right]$

1.273. Полная энергия релятивистской частицы в 8 раз превышает ее энергию покоя. Определить скорость этой частицы. [298 Мм/с]

1.274. Кинетическая энергия частицы оказалась равной ее энергии покоя. Определить скорость частицы. [260 Мм/с]

1.275. Определить релятивистский импульс p и кинетическую энергию T протона, движущегося со скоростью $v = 0{,}75\,c$ [$5{,}68 \cdot 10^{-19}$ кг·м/с; $7{,}69 \cdot 10^{-11}$ Дж]

1.276. Определить кинетическую энергию электрона, если масса движущегося электрона втрое больше его массы покоя. Ответ выразить в электронвольтах [1,02 МэВ]

1.277. Определить, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы его скорость составила 90 % скорости света. [1,22 ГВ]

1.278. Определить, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его продольные размеры уменьшились в два раза. [512 кВ]

1.279. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой покоя m_0 от 0,5 c до 0,7 c. [0,245 m_0c^2]

1.280. Вывести в общем виде зависимость между релятивистским импульсом, кинетической энергией релятивистской частицы и ее массой покоя.

$$\left[\ p=\frac{\sqrt{T(T+2m_0c^2)}}{c}\ \right]$$

1.281. Определить релятивистский импульс электрона, кинетическая энергия которого $T=1$ ГэВ. [$5{,}34\cdot10^{-19}$ кг·м/с]

1.282. Доказать, что выражение релятивистского импульса $p=\frac{\sqrt{T(T+2m_0c^2)}}{c}$ при $v\ll c$ переходит в соответствующее выражение классической механики.

1.283. Доказать, что для релятивистской частицы величина $E^2-p^2c^2$ является инвариантной, т. е. имеет одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета. [$E^2-p^2c^2=m_0^2c^4$]

1.284. Определить энергию, которую необходимо затратить, чтобы разделить ядро дейтрона на протон и нейтрон. Массу ядра дейтрона принять равной $3{,}343\cdot10^{-27}$ кг. Ответ выразить в электрон-вольтах. [2,25 МэВ]

1.285. Определить энергию связи ядра $^{14}_{7}N$. Принять массу ядра азота равной $2{,}325\cdot10^{-26}$ кг. Ответ выразить в электронвольтах. [100 МэВ]

2 Основы молекулярной физики и термодинамики

2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов

Основные законы и формулы

- Закон Бойля — Мариотта

$$pV=\text{const} \text{ при } T=\text{const},\ m=\text{const},$$

где p — давление; V — объем; T — термодинамическая температура; m — масса газа.

- Закон Гей-Люссака

$$V=V_0(1+\alpha t), \text{ или } V_1/V_2=T_1/T_2 \text{ при } p=\text{const},\ m=\text{const};$$

$$p=p_0(1+\alpha t), \text{ или } p_1/p_2=T_1/T_2 \text{ при } V=\text{const},\ m=\text{const},$$

где t — температура по шкале Цельсия, V_0 и p_0 — соответственно объем и давление при 0 °С; коэффициент $\alpha={}^1/_{273}$ К$^{-1}$; индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям.

- Закон Дальтона для давления смеси n идеальных газов

$$p=\sum_{i=1}^{n}p_i,$$

где p_i — парциальное давление i-го компонента смеси.

- Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона — Менделеева)

$$pV_m=RT \text{ (для одного моля газа)},$$

$$pV=(m/M)RT \text{ (для произвольной массы газа)},$$

где V_m — молярный объем; R — молярная газовая постоянная, M — молярная маса газа, m — масса газа, $m/M=\nu$ — количество вещества

- Зависимость давления газа от концентрации n молекул и температуры

$$p=nkT,$$

где k — постоянная Больцмана ($k=R/N_A$, N_A — постоянная Авогадро).

● Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2,$$

или

$$pV = \frac{2}{3} N \left(\frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} \right) = \frac{2}{3} E,$$

или

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2 = \frac{1}{3} m \langle v_{\text{кв}} \rangle^2,$$

где $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ — средняя квадратичная скорость молекул, E — суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа, n — концентрация молекул, m_0 — масса одной молекулы, $m = N m_0$ — масса газа, N — число молекул в объеме газа V

● Скорость молекул

наиболее вероятная

$$v_{\text{в}} = \sqrt{2RT/M} = \sqrt{2kT/m_0},$$

средняя квадратичная

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{3RT/M} = \sqrt{3kT/m_0},$$

средняя арифметическая

$$\langle v \rangle = \sqrt{8RT/(\pi M)} = \sqrt{8kT/(\pi m_0)},$$

где m_0 — масса одной молекулы

● Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} kT$$

● Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям

$$f(v) = \frac{dN(v)}{N dv} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2/(2kT)},$$

где функция $f(v)$ распределения молекул по скоростям определяет относительное число молекул $dN(v)/N$ из общего числа N молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$

● Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по энергиям теплового движения

$$f(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{N d\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/(kT)},$$

где функция $f(\varepsilon)$ распределения молекул по энергиям теплового движения определяет относительное число молекул $dN(\varepsilon)/N$ из общего числа N молекул, которые имеют кинетические энергии $\varepsilon = m_0 v^2/2$, заключенные в интервале от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$

● Барометрическая формула

$$p_h = p_0 e^{-Mg(h-h_0)/(RT)},$$

где p_h и p_0 — давление газа на высоте h и h_0.

● Распределение Больцмана во внешнем потенциальном поле

$$n = n_0 e^{-Mgh/(RT)} = n_0 e^{-m_0 gh/(kT)}, \text{ или } n = n_0 e^{-\Pi/(kT)},$$

где n и n_0 — концентрация молекул на высоте h и $h = 0$, $\Pi = m_0 gh$ — потенциальная энергия молекулы в поле тяготения

● Среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1 с,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle,$$

где d — эффективный диаметр молекулы, n — концентрация молекул, $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул.

● Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$$

● Закон теплопроводности Фурье

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dx} St,$$

где Q — теплота, прошедшая посредством теплопроводности через площадь S за время t, dT/dx — градиент температуры, λ — теплопроводность:

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ — плотность газа, $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость теплового движения его молекул, $\langle l \rangle$ — средняя длина свободного пробега молекул.

● Закон диффузии Фика

$$M = -D \frac{d\rho}{dx} St,$$

где M — масса вещества, переносимая посредством диффузии через площадь S за время t; $d\rho/dx$ — градиент плотности, D — диффузия:

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

● Закон Ньютона для внутреннего трения (вязкости)

$$F = -\eta \frac{dv}{dx} S,$$

где F — сила внутреннего трения между движущимися слоями площадью S; dv/dx — градиент скорости, η — динамическая вязкость:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

Примеры решения задач

Задача 1. В закрытом сосуде при температуре 300 К и давлении 0,1 МПа находятся 10 г водорода и 16 г гелия. Считая газы идеальными, определить удельный объем смеси.

Дано: $m_1 = 10$ г $= 10^{-2}$ кг, $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $m_2 = 16$ г $= 1{,}6 \cdot 10^{-2}$ кг, $M_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $T = 300$ К, $p = 0{,}1$ МПа $= 10^5$ Па.

Определить $v_{\text{см}}$.

Решение. Согласно закону Дальтона, давление p смеси газов равно сумме парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2 \tag{1}$$

Из уравнения Клапейрона — Менделеева имеем

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT \text{ и } p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT.$$

Найдя отсюда p_1 и p_2 и подставив в (1), получим

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) RT.$$

Удельный объем смеси

$$v_{\text{см}} = \frac{V}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1/M_1 + m_2/M_2)RT}{(m_1 + m_2)p}.$$

Вычисляя, получим $v_{\text{см}} = 8{,}63$ м^3/кг.

Задача 2. Определить среднюю арифметическую скорость молекул идеального газа, плотность которого при давлении 35 кПа составляет 0,3 кг/м^3.

Дано: $p = 35$ кПа $= 3{,}5 \cdot 10^4$ Па, $\rho = 0{,}3$ кг/м^3.

Определить $\langle v \rangle$.

Решение. Согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории идеальных газов,

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2, \tag{1}$$

где n — концентрация молекул; m_0 — масса одной молекулы; $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ — средняя квадратичная скорость молекул.

Учитывая, что $\langle v \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m_0)}$, а $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{3kT/m_0}$, получаем

$$\langle v \rangle = \sqrt{8/(3\pi)} \langle v_{\text{кв}} \rangle. \tag{2}$$

Так как плотность газа

$$\rho = m/V = N m_0 / V = n m_0,$$

где m — масса газа; V — его объем; N — число всех молекул газа, то уравнение (1) можно записать в виде

$$p = \frac{1}{3} \rho \langle v_{\text{кв}} \rangle^2$$

или $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{3p/\rho}$. Подставляя это выражение в формулу (2), находим искомую среднюю арифметическую скорость:

$$\langle v \rangle = \sqrt{8p/(\pi\rho)}.$$

Вычисляя, получаем $\langle v \rangle = 545$ м/с.

Задача 3. Используя функцию распределения молекул идеального газа по относительным скоростям $f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2$ $(u = v/v_{\text{в}})$, определить число молекул, скорости v которых меньше 0,002 наиболее вероятной скорости, если в объеме газа содержится $N = 1{,}67 \cdot 10^{24}$ молекул.

Дано: $f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2$, $u = v/v_{\text{в}}$, $v_{\max} = 0{,}002 v_{\text{в}}$, $N = 1{,}67 \cdot 10^{24}$.

Определить ΔN.

Решение. Число $dN(u)$ молекул, относительные скорости которых заключены в пределах от u до $u + du$,

$$dN(u) = N f(u) du = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du, \tag{1}$$

где N — число молекул в объеме газа. По условию задачи, $v_{\max} = 0{,}002 v_{\text{в}}$, то $u_{\max} = v_{\max}/v_{\text{в}} = 0{,}002$. Так как $u \ll 1$, то $e^{-u^2} \approx 1 - u^2$. Пренебрегая $u^2 \ll 1$, выражение (1) можно записать в виде

$$dN(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} u^2 du. \tag{2}$$

Проинтегрировав (2) по u в пределах от 0 до $u_{\max}$, найдем

$$\Delta N = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{\max}} u^2 du = \frac{4N}{3\sqrt{\pi}} u_{\max}^3.$$

Вычисляя, получаем $\Delta N = 10^{16}$ молекул.

Задача 4. Определить, во сколько раз отличается коэффициент диффузии азота ($M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) и углекислого газа ($M_2 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль), если оба газа находятся при одинаковых температуре и давлении. Эффективные диаметры молекул этих газов считать одинаковыми.

Дано: $M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $M_2 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $T_1 = T_2$, $p_1 = p_2$, $d_1 = d_2$.

Определить D_1/D_2.

Решение. Коэффициент диффузии газа

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle \langle l\rangle, \qquad (1)$$

где $\langle v\rangle = \sqrt{8RT/(\pi M)}$ — средняя арифметическая скорость его молекул; $\langle l\rangle = 1/(\sqrt{2}\pi d^2 n)$ — средняя длина свободного пробега молекул. Поскольку $p = nkT$, из условия задачи ($p_1 = p_2$, $T_1 = T_2$) следует, что $n_1 = n_2$. Подставив значения $\langle v\rangle$, $\langle l\rangle$ в формулу (1) и учитывая условие задачи, найдем

$$D_1/D_2 = \sqrt{M_2/M_1}.$$

Вычисляя, получаем $D_1/D_2 = 1{,}25$.

Задачи

2.1. Начертить графики изотермического, изобарного и изохорного процессов в координатах p и V, p и T, T и V.

2.2. Определить число N атомов в 1 кг водорода и массу одного атома водорода. [$N = 3{,}01\cdot10^{26}$; $m_0 = 3{,}32\times\times10^{-27}$ кг]

2.3. В закрытом сосуде вместимостью 20 л находятся водород массой 6 г и гелий массой 12 г. Определить: 1) давление; 2) молярную массу газовой смеси в сосуде, если температура смеси $T = 300$ К. [1) $p = 0{,}75$ МПа; 2) $M = 3\cdot10^{-3}$ кг/моль]

2.4. Определить плотность смеси газов водорода массой $m_1 = 8$ г и кислорода массой $m_2 = 64$ г при температуре $T = 290$ К и при давлении 0,1 МПа. Газы считать идеальными. [0,498 кг/м^3]

2.5. В баллоне вместимостью 15 л находится азот под давлением 100 кПа при температуре $t_1 = 27$ °C. После того как из баллона выпустили азот массой 14 г, температура газа стала равной $t_2 = 17$ °C. Определить давление азота, оставшегося в баллоне. [16,3 кПа]

2.6. Баллон вместимостью $V = 20$ л содержит смесь водорода и азота при температуре 290 К и давлении 1 МПа. Определить массу водорода, если масса смеси равна 150 г. [6,3 г]

2.7. Азот массой 7 г находится под давлением $p = 0{,}1$ МПа и температуре $T_1 = 290$ К. Вследствие изобарного нагревания азот занял объем $V_2 = 10$ л. Определить: 1) объем V_1 газа до расширения; 2) температуру T_2 газа после расширения; 3) плотности газа до и после расширения. [$V_1 = 6{,}03\cdot10^{-3}$ м^3; 2) $T_2 = 481$ К; 3) $\rho_1 = 1{,}16$ кг/м^3, $\rho_2 = 0{,}7$ кг/м^3]

2.8. В сосуде вместимостью 1 л находится кислород массой 1 г. Определить концентрацию молекул кислорода в сосуде. [$1{,}88\cdot10^{25}$ м$^{-3}$]

2.9. В сосуде вместимостью 5 л при нормальных условиях находится азот. Определить: 1) количество вещества ν; 2) массу кислорода; 3) концентрацию n его молекул в сосуде. [1) $\nu = 0{,}223$ моль; 2) $m = 6{,}24$ г; 3) $n = 2{,}69\times\times10^{25}$ м$^{-3}$]

2.10. Средняя квадратичная скорость некоторого газа при нормальных условиях равна 480 м/с. Сколько молекул содержит 1 г этого газа? [$2{,}04\cdot10^{22}$]

2.11. В сосуде вместимостью $V = 0{,}3$ л при температуре $T = 290$ К находится некоторый газ. На сколько понизится давление p газа в сосуде, если из него из-за утечки выйдет $N = 10^{19}$ молекул? [133 Па]

2.12. Определить давление, оказываемое газом на стенки сосуда, если его плотность равна 0,01 кг/м^3, а средняя квадратичная скорость молекул газа составляет 480 м/с. [768 Па]

2.13. Определить наиболее вероятную скорость молекул газа, плотность которого при давлении 40 кПа составляет 0,35 кг/м^3. [478 м/с]

2.14. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon_0\rangle$ поступательного движения молекул газа, находящегося под давлением 0,1 Па. Концентрация молекул газа равна 10^{13} см$^{-3}$. [$1{,}5\cdot10^{-19}$ Дж]

2.15. Определить: 1) наиболее вероятную $v_в$; 2) среднюю арифметическую $\langle v\rangle$; 3) среднюю квадратичную $\langle v_{кв}\rangle$ скорости молекул азота (N_2) при 27 °C. [1) $v_в = 422$ м/с; 2) $\langle v\rangle = 476$ м/с; 3) $\langle v_{кв}\rangle = 517$ м/с]

2.16. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода больше их наиболее вероятной скорости на 100 м/с? [381 К]

2.17. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найти формулу наиболее вероятной скорости $v_в$. [$v_в = \sqrt{2kT/m_0}$]

2.18. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найти закон, выражающий распределение молекул по относительным скоростям u ($u = v/v_в$). $\left[\, f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \,\right]$

2.19. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найти среднюю арифметическую скорость $\langle v \rangle$ молекул. [$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m_0)}$]

2.20. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найти среднюю квадратичную скорость $\langle v_{кв} \rangle$. [$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{3kT/m_0}$]

2.21. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найти среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon \rangle$ молекул. [$\langle \varepsilon \rangle = {}^3/_2 kT$]

2.22. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найти наиболее вероятное значение энергии $\varepsilon_в$ молекул. [$\varepsilon_в = {}^1/_2 kT$]

2.23. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найти для данной температуры отношение средней кинетической энергии $\langle \varepsilon \rangle$ молекул к их наиболее вероятному значению энергии $\varepsilon_в$. [3]

2.24. Закон распределения молекул газа по скоростям в некотором молекулярном пучке имеет вид $f(v) = Av^2 \times \times e^{-m_0 v^2/(2kT)}$. Определить: 1) наиболее вероятную скорость $v_в$; 2) наиболее вероятное значение энергии $\varepsilon_в$ молекул в этом пучке. [1) $v_в = \sqrt{3kT/m_0}$; 2) $\varepsilon_в = kT$]

2.25. На какой высоте давление воздуха составляет 60 % от давления на уровне моря? Считать, что температура воздуха везде одинакова и равна 10 °С. [4,22 км]

2.26. Каково давление воздуха в шахте на глубине 1 км, если считать, что температура по всей высоте постоянная и равна 22 °С, а ускорение свободного падения не зависит от высоты? Давление воздуха у поверхности Земли принять равным p_0. [1,12 p_0]

2.27. Определить отношение давления воздуха на высоте 1 км к давлению на дне скважины глубиной 1 км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях, и его температура не зависит от высоты. **[0,778]**

2.28. На какой высоте плотность воздуха в е раз (е — основание натуральных логарифмов) меньше по сравнению с его плотностью на уровне моря? Температуру воздуха и ускорение свободного падения считать не зависящими от высоты. [7,98 км]

2.29. Используя идею установки Перрена для определения числа Авогадро и применив к частицам краски, взвешенных в воде, больцмановское распределение, найти объем частиц, если при расстоянии между двумя слоями 80 мкм число взвешенных частиц в одном слое вдвое больше, чем в другом. Плотность растворенной краски 1700 кг/м^3, а температура окружающей среды 300 К. [$5{,}22 \cdot 10^{-21}$ м^3]

2.30. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул кислорода, находящегося при температуре 0 °С, если среднее число $\langle z \rangle$ столкновений, испытываемых молекулой в 1 с, равно $3{,}7 \cdot 10^9$. [115 нм]

2.31. При каком давлении средняя длина свободного пробега молекул водорода равна 2,5 см, если температура газа равна 67 °С? Диаметр молекулы водорода принять равным 0,28 нм. [0,539 Па]

2.32. Определить среднюю продолжительность $\langle \tau \rangle$ свободного пробега молекул водорода при температуре 27 °С и давлении 5 кПа. Диаметр молекулы водорода принять равным 0,28 нм. [13,3 нс]

2.33. Средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул водорода при нормальных условиях составляет 0,1 мкм. Определить среднюю длину их свободного пробега при давлении 0,1 мПа, если температура газа остается постоянной. [101 м]

2.34. При температуре 300 К и некотором давлении средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул кислорода равна 0,1 мкм. Чему равно среднее число $\langle z \rangle$ столкновений, испытываемых молекулами в 1 с, если сосуд откачать до 0,1 первоначального давления? Температуру газа считать постоянной. [$4{,}45 \cdot 10^8$ с$^{-1}$]

2.35. Определить: 1) плотность ρ воздуха в сосуде; 2) концентрацию n его молекул; 3) среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул, если сосуд откачан до давления 0,13 Па. Диаметр молекул воздуха принять равным 0,27 нм. Температура воздуха 300 К. [1) $\rho = 1{,}51 \cdot 10^{-6}$ кг/м^3; 2) $n = 3{,}14 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$; 3) $\langle l \rangle = 0{,}01$ м]

2.36. Определить коэффициент теплопроводности λ азота, находящегося в некотором объеме при температуре 280 К. Эффективный диаметр молекул азота принять равным 0,38 нм. [8,25 мВт/(м·К)]

2.37. Кислород находится при нормальных условиях. Определить коэффициент теплопроводности λ кислорода, если эффективный диаметр его молекул равен 0,36 нм. [8,49 мВт/(м·К)]

2.38. Пространство между двумя параллельными пластинами площадью 150 см^2 каждая, находящимися на расстоянии 5 мм друг от друга, заполнено кислородом. Одна пластина поддерживается при температуре 17 °С, другая — при температуре 27 °С. Определить количество теплоты, прошедшее за 5 мин посредством теплопроводности от одной пластины к другой. Кислород находится при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекул кислорода считать равным 0,36 нм. [76,4 Дж]

2.39. Определить коэффициент диффузии D кислорода при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекул кислорода принять равным 0,36 нм. [$9{,}18\cdot10^{-6}$ м²/с]

2.40. Определить массу азота прошедшего вследствие диффузии через площадку 50 см² за 20 с, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном площадке, равен 1 кг/м⁴. Температура азота 290 К, а средняя длина свободного пробега его молекул равна 1 мкм. [15,6 мг]

2.41. Определить, во сколько раз отличаются коэффициенты динамической вязкости η углекислого газа и азота, если оба газа находятся при одинаковых температуре и давлении. Эффективные диаметры молекул этих газов считать равными. [1,25]

2.42. Определить коэффициент теплопроводности λ азота, если коэффициент динамической вязкости η для него при тех же условиях равен 10 мкПа·с. [7,42 мВт/(м·К)]

2.43. Азот находится под давлением 100 кПа при температуре 290 К. Определить коэффициенты диффузии D и внутреннего трения η. Эффективный диаметр молекул азота принять равным 0,38 нм. [$D = 9{,}74 \times 10^{-6}$ м²/с, $\eta = 1{,}13\cdot10^{-5}$ кг/(м·с)]

2.44. Ниже какого давления можно говорить о вакууме между стенками сосуда Дьюара, если расстояние между стенками сосуда равно 8 мм, а температура 17 °С? Эффективный диаметр молекул воздуха принять равным 0,27 нм. [$p \leqslant 1{,}55$ Па]

2.45. Давление разреженного газа в рентгеновской трубке при температуре 17 °С равно 130 мкПа. Можно ли вести разговор о высоком вакууме, если характерный размер l_0 (расстояние между катодом и анодом трубки) составляет 50 мм? Эффективный диаметр молекул воздуха принять равным 0,27 нм. [Можно, так как $\langle l\rangle = 95{,}3\ \text{м} \gg l_0$]

2.2. Основы термодинамики

Основные законы и формулы

- Средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну степень свободы молекулы,

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2}kT.$$

- Средняя энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2}kT,$$

где i — сумма поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы ($i = n_{\text{пост}} + n_{\text{вращ}} + 2n_{\text{колеб}}$)

- Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \nu\frac{i}{2}RT = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT,$$

где ν — количество вещества; m — масса газа; M — молярная масса газа; R — молярная газовая постоянная.

- Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q — количество теплоты, сообщенное системе или отданное ею; ΔU — изменение ее внутренней энергии; A — работа системы против внешних сил.

- Первое начало термодинамики для малого изменения системы

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A.$$

- Связь между молярной C_m и удельной c теплоемкостями газа

$$C_m = cM,$$

где M — молярная масса газа.

- Молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении

$$C_V = \frac{i}{2}R,\quad C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

- Уравнение Майера

$$C_p = C_V + R.$$

- Изменение внутренней энергии идеального газа

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{M}C_V\mathrm{d}T.$$

- Работа, совершаемая газом при изменении его объема,

$$\mathrm{d}A = p\mathrm{d}V.$$

- Полная работа при изменении объема газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV,$$

где V_1 и V_2 — соответственно начальный и конечный объемы газа.

- Работа газа·
при изобарном процессе

$$A = p(V_2 - V_1), \text{ или } A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1),$$

при изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \text{ или } A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

- Уравнение адиабатического процесса (уравнение Пуассона)

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad T^{\gamma}p^{1-\gamma} = \text{const},$$

где $\gamma = C_p/C_V = (i+2)/i$ — показатель адиабаты

- Работа в случае адиабатического процесса

$$A = \frac{m}{M} C_V(T_1 - T_2), \text{ или } A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] =$$

$$= \frac{p_1V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],$$

где T_1, T_2 и V_1, V_2 — соответственно начальные и конечные температура и объем газа.

- Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 — количество теплоты, полученное системой, Q_2 — количество теплоты, отданное системой, A — работа, совершаемая за цикл

- Термический коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 — температура нагревателя, T_2 — температура холодильника

- Изменение энтропии при равновесном переходе из состояния *1* в состояние *2*

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T}$$

Примеры решения задач

Задача 5. Кислород ($M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг), находящийся при давлении $p_1 = 0{,}5$ МПа и температуре $T_1 = 350$ К, подвергли сначала адиабатическому расширению от объема $V_1 = 1$ л до объема $V_2 = 2$ л, а затем изобарному расширению, в результате которого объем газа увеличился от объема V_2 до объема $V_3 = 3$ л. Определить для каждого из этих процессов: 1) работу, совершенную газом; 2) изменение его внутренней энергии; 3) количество подведенной к газу теплоты.

Дано: $p_1 = 0{,}5$ МПа $= 0{,}5 \cdot 10^6$ Па, $T_1 = 350$ К, $V_1 = 1$ л $= 10^{-3}$ м^3, $V_2 = 2$ л $= 2 \cdot 10^{-3}$ м^3, $V_3 = 3$ л $= 3 \cdot 10^{-3}$ м^3.

Определить: 1) A; 2) ΔU; 3) Q.

Решение. Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты Q, сообщенное газу, расходуется на изменение внутренней энергии газа (ΔU) и совершение газом работы (A) против внешних сил:

$$Q = \Delta U + A. \tag{1}$$

Адиабатический процесс *1—2* (рис. 45) совершается без теплообмена с окружающей средой, поэтому

$$Q_{12} = 0. \tag{2}$$

Работа, совершаемая газом в адиабатическом процессе,

$$A_{12} = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right], \tag{3}$$

где $\gamma = (i+2)/i = 1{,}4$ (кислород — двухатомный газ, число степеней свободы $i = 5$).

Согласно уравнению (1), в адиабатическом процессе

$$\Delta U_{12} = -A_{12}. \tag{4}$$

Изобарный процесс *2—3*: работа изобарного расширения

$$A_{23} = p_2(V_3 - V_2), \tag{5}$$

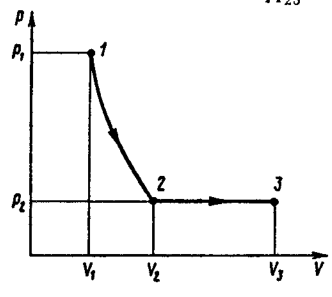


Рис. 45

где давление p_2 найдем воспользовавшись уравнением Пуассона для адиабаты *1—2*:

$$p_2 = p_1(V_1/V_2)^{\gamma}.$$

Подставив это выражение в формулу (5), получим

$$A_{23} = p_1(V_3 - V_2)\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma}. \tag{6}$$

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U_{23}=\frac{m}{M}C_V\Delta T=\frac{m}{M}C_V(T_3-T_2), \quad (7)$$

где m — масса газа; C_V — его молярная теплоемкость при постоянном объеме. Массу m газа находим из уравнения Клапейрона — Менделеева $p_1V_1=\frac{m}{M}RT$, откуда $m=\frac{Mp_1V_1}{RT_1}$.

Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V=iR/2$. Подставив эти выражения в уравнение (7), получим

$$\Delta U_{23}=\frac{i}{2}\frac{p_1V_1}{T_1}(T_3-T_2). \quad (8)$$

Температуры T_3 и T_2 найдем воспользовавшись уравнением Пуассона для адиабатического процесса *1—2* и законом Гей-Люссака для изобарного процесса *2—3*:

$$T_2=T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}=265\ \text{К} \text{ и } T_3=T_2\frac{V_3}{V_2}=397\ \text{К}.$$

Количество теплоты Q_{23}, подведенное к газу в изобарном процессе найдем, согласно (1)

$$Q_{23}=A_{23}+\Delta U_{23}. \quad (9)$$

Подставляя данные задачи, получаем: $A_{12}=303$ Дж; $\Delta U_{12}=-303$ Дж; $Q_{12}=0$; $A_{23}=189$ Дж; $\Delta U_{23}=471$ Дж; $Q_{23}=660$ Дж.

Задача 6. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, произвел работу $A=600$ Дж. Температура T_1 нагревателя равна 500 К, T_2 холодильника — 300 К. Определить: 1) термический к.п.д. цикла; 2) количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл.

Дано: $A=600$ Дж; $T_1=500$ К; $T_2=300$ К.

Определить: 1) η; 2) Q_2.

Решение. Термический к.п.д. цикла Карно

$$\eta=(T_1-T_2)/T_1.$$

Количество теплоты, отданное холодильнику,

$$Q_2=Q_1-A, \quad (1)$$

где $Q_1=A/\eta$ — количество теплоты, полученной от нагревателя.

Подставив это выражение в (1), найдем

$$Q_2=A\left(\frac{1}{\eta}-1\right).$$

Вычисляя, получаем: 1) $\eta=0{,}4$; $Q_2=900$ Дж.

Задача 7. Определить изменение энтропии ΔS при изотермическом расширении азота массой $m=10$ г, если давление газа уменьшилось от $p_1=0{,}1$ МПа до $p_2=50$ кПа.

Дано: $m=10\ \text{г}=10^{-2}$ кг, $M=28\cdot10^{-3}$ кг/моль; $p_1=0{,}1\ \text{МПа}=10^5$ Па, $p_2=50\ \text{кПа}=5\cdot10^4$ Па.

Определить ΔS.

Решение. Изменение энтропии, учитывая, что процесс изотермический,

$$\Delta S=\int_1^2\frac{dQ}{T}=\frac{1}{T}\int_1^2 dQ=\frac{Q}{T}. \quad (1)$$

Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты, полученное газом, $Q=A+\Delta U$. Для изотермического процесса $\Delta U=0$, поэтому $Q=A$. Работа газа в изотермическом процессе

$$A=\frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}=\frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2}. \quad (2)$$

Подставив (2) в (*1*), найдем искомое изменение энтропии:

$$\Delta S=\frac{m}{M}R\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Вычисляя, получаем $\Delta S=2{,}06$ Дж/К.

Задачи

2.46. Азот массой $m=10$ г находится при температуре $T=290$ К. Определить: 1) среднюю кинетическую энергию одной молекулы азота; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения всех молекул азота. Газ считать идеальным. [1) 10^{-20} Дж; 2) 860 Дж]

2.47. Кислород массой $m=1$ кг находится при температуре $T=320$ К. Определить: 1) внутреннюю энергию молекул кислорода; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул кислорода. Газ считать идеальным. [1) 208 кДж; 2) 83,1 кДж]

2.48. В закрытом сосуде находится смесь азота массой $m_1=56$ г и кислорода массой $m_2=64$ г. Определить изменение внутренней энергии этой смеси, если ее охладили на 20°. [1,66 кДж]

2.49. Считая азот идеальным газом, определить его удельную теплоемкость: 1) для изобарного процесса; 2) для изохорного процесса. [1) $c_V = 742$ Дж/(кг·К); 2) $c_p = 1{,}04$ кДж/(кг·К)]

2.50. Определить удельные теплоемкости c_V и c_p, если известно, что некоторый газ при нормальных условиях имеет удельный объем $v = 0{,}7$ м^3/кг. Что это за газ? [$c_V = 649$ Дж/(кг·К), $c_p = 909$ Дж/(кг·К)]

2.51. Определить удельные теплоемкости c_V и c_p смеси углекислого газа массой $m_1 = 3$ г и азота массой $m_2 = 4$ г. [$c_V = 667$ Дж/(кг·К), $c_p = 918$ Дж/(кг·К)]

2.52. Определить показатель адиабаты γ для смеси газов, содержащей гелий массой $m_1 = 8$ г и водород массой $m_2 = 2$ г [1,55]

2.53. Применяя первое начало термодинамики и уравнение состояния идеального газа, показать, что разность удельных теплоемкостей $c_p - c_V = R/M$.

2.54. Кислород массой 32 г находится в закрытом сосуде под давлением 0,1 МПа при температуре 290 К. После нагревания давление в сосуде повысилось в 4 раза. Определить: 1) объем сосуда; 2) температуру, до которой газ нагрели; 3) количество теплоты, сообщенное газу. [1) $2{,}41 \cdot 10^{-2}$ м^3; 2) 1,16 кК; 3) 18,1 кДж]

2.55. Определить количество теплоты, собщенное газу, если в процессе изохорного нагревания кислорода объемом $V = 20$ л его давление изменилось на $\Delta p = 100$ кПа. [5 кДж]

2.56. Двухатомный идеальный газ ($\nu = 2$ моль) нагревают при постоянном объеме до температуры $T_1 = 289$ К. Определить количество теплоты, которое необходимо сообщить газу, чтобы увеличить его давление в $n = 3$ раза. [24 кДж]

2.57. При изобарном нагревании некоторого идеального газа ($\nu = 2$ моль) на $\Delta T = 90$ К ему было сообщено количество теплоты 2,1 кДж. Определить: 1) работу, совершаемую газом; 2) изменение внутренней энергии газа; 3) величину $\gamma = C_p/C_V$. [1) 1,5 кДж; 2) 3,75 кДж; 3) 1,4]

2.58. Азот массой $m = 280$ г расширяется в результате изобарного процесса при давлении $p = 1$ МПа. Определить: 1) работу расширения; 2) конечный объем газа, если на расширение затрачена теплота $Q = 5$ кДж, а начальная температура азота $T_1 = 290$ К. [$A = 1{,}43$ кДж; $V_2 = 0{,}026$ м^3]

2.59 Кислород объемом 1 л находится под давлением 1 МПа. Определить, какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы: 1) увеличить его объем вдвое в результате изобарного процесса; 2) увеличить его давление вдвое в результате изохорного процесса. [1) 3,5 кДж; 2) 2,5 кДж]

2.60. Некоторый газ массой $m = 5$ г расширяется изотермически от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Работа расширения $A = 1$ кДж. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа. [930 м/с]

2.61. Азот массой $m = 14$ г сжимают изотермически при температуре $T = 300$ К от давления $p_1 = 100$ кПа до давления $p_2 = 500$ кПа. Определить: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу сжатия; 3) количество выделившейся теплоты. [1) 0; 2) —2,01 кДж; 3) 2,01 кДж]

2.62. Некоторый газ массой 1 кг находится при температуре $T = 300$ К и под давлением $p_1 = 0{,}5$ МПа. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в два раза. Работа, затраченная на сжатие, $A = -432$ кДж. Определить: 1) какой это газ; 2) первоначальный удельный объем газа. [2) 1,25 м^3/кг]

2.63. Азот массой $m = 50$ г находится при температуре $T_1 = 280$ К. В результате изохорного охлаждения его давление уменьшилось в $n = 2$ раза, а затем в результате изобарного расширения температура газа в конечном состоянии стала равной первоначальной. Определить: 1) работу, совершенную газом; 2) изменение внутренней энергии газа. [1) 2,08 кДж; 2) 0]

2.64. Работа расширения некоторого двухатомного идеального газа составляет $A = 2$ кДж. Определить количество подведенной к газу теплоты, если процесс протекал: 1) изотермически; 2) изобарно. [1) 2 кДж; 2) 7 кДж]

2.65. При адиабатическом расширении кислорода ($\nu = 2$ моль), находящегося при нормальных условиях, его объем увеличился в $n = 3$ раза. Определить: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу расширения газа. [1) —4,03 кДж; 2) 4,03 кДж]

2.66. Азот массой $m = 1$ кг занимает при температуре $T_1 = 300$ К объем $V_1 = 0{,}5$ м^3. В результате адиабатического сжатия давление газа увеличилось в 3 раза. Определить: 1) конечный объем газа; 2) его конечную температуру; 3) изменение внутренней энергии газа. [1) 0,228 м^3; 2) 411 К; 3) 82,4 кДж]

2.67. Азот, находившийся при температуре 400 К, подвергли адиабатическому расширению, в результате которого его объем увеличился в $n = 5$ раз, а внутренняя энергия уменьшилась на 4 кДж. Определить массу азота. [28 г]

2.68. Двухатомный идеальный газ занимает объем $V_1 = 1$ л и находится под давлением $p_1 = 0{,}1$ МПа. После адиабатического сжатия газ характеризуется объемом V_2 и давлением p_2. В результате последующего изохорного процесса газ охлаждается до первоначальной температуры, а его давление $p_3 = 0{,}2$ МПа. Определить: 1) объем V_2; 2) давление p_2. Начертить график этих процессов. [1) 0,5 л; 2) 264 кПа]

2.69. Кислород, занимающий при давлении $p_1 = 1$ МПа объем $V_1 = 5$ л, расширяется в $n = 3$ раза. Определить конечное давление и работу, совершенную газом. Рассмотреть следующие процессы: 1) изобарный; 2) изотермический; 3) адиабатический. [1) 1 МПа, 10 кДж; 2) 0,33 МПа, 5,5 кДж; 3) 0,21 МПа, 4,63 кДж]

2.70. Кислород массой 10 г, находящийся при температуре 370 К, подвергли адиабатическому расширению, в результате которого его давление уменьшилось в $n = 4$ раза. В результате последующего изотермического процесса газ сжимается до первоначального давления. Определить: 1) температуру газа в конце процесса; 2) количество теплоты, отданное газом; 3) приращение внутренней энергии газа; 4) работу, совершенную газом. [1) 249 К; 2) 896 Дж; 3) —786 Дж; 4) —110 Дж]

2.71. Идеальный двухатомный газ, занимающий объем $V_1 = 2$ л, подвергают адиабатическому расширению, в результате которого его объем возрос в $n = 5$ раз. После этого газ подвергли изобарному сжатию до первоначального объема, а затем он в результате изохорного нагревания возвращен в первоначальное состояние. Построить график цикла и определить термический к.п.д. цикла. [34,3 %]

2.72. Идеальный двухатомный газ ($\nu = 3$ моль), занимающий объем $V_1 = 5$ л и находящийся под давлением $p_1 = 1$ МПа, подвергают изохорному нагреванию до $T_2 = 500$ К. После этого газ подвергли изотермическому расширению до начального давления, а затем он в результате изобарного сжатия возвращен в первоначальное состояние. Построить график цикла и определить термический к.п.д. цикла. [15,3 %]

2.73. Рабочее тело — идеальный газ — теплового двигателя совершает цикл, состоящий из последующих процессов: изобарного, адиабатического и изотермического.

В результате изобарного процесса газ нагревается от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 600$ К. Определить термический к.п.д. теплового двигателя. [30,7 %]

2.74. Азот массой 500 г, находящийся под давлением $p_1 = 1$ МПа при температуре $t_1 = 127\,°C$, подвергли изотермическому расширению, в результате которого давление газа уменьшилось в $n = 3$ раза. После этого газ подвергли адиабатическому сжатию до начального давления, а затем он был изобарно сжат до начального объема. Построить график цикла и определить работу, совершенную газом за цикл. [—11,5 кДж]

2.75. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 70 % количества теплоты, полученной от нагревателя, отдает холодильнику. Количество теплоты, получаемое от нагревателя, равно 5 кДж. Определить: 1) термический к.п.д. цикла; 2) работу, совершенную при полном цикле. [1) 30 %; 2) 1,5 кДж]

2.76. Идеальный газ совершает цикл Карно. Газ получил от нагревателя количество теплоты 5,5 кДж и совершил работу 1,1 кДж. Определить: 1) термический к.п.д. цикла; 2) отношение температур нагревателя и холодильника. [1) 20 %; 2) 1,25]

2.77. Идеальный газ совершает цикл Карно, термический к.п.д. которого равен 0,4. Определить работу изотермического сжатия газа, если работа изотермического расширения составляет 400 Дж. [—240 Дж]

2.78. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя $T_1 = 500$ К, холодильника $T_2 = 300$ К. Работа изотермического расширения газа составляет 2 кДж. Определить: 1) термический к.п.д. цикла; 2) количество теплоты, отданное газом при изотермическом сжатии холодильнику. [1) 40 %; 2) 0,6 кДж]

2.79. Многоатомный идеальный газ совершает цикл Карно, при этом в процессе адиабатического расширения объем газа увеличивается в $n = 4$ раза. Определить термический к.п.д. цикла. [37 %]

2.80. Во сколько раз необходимо увеличить объем $\nu = 5$ моль идеального газа при изотермическом расширении, если его энтропия увеличилась на 57,6 Дж/К? [4]

2.81. При нагревании двухатомного идеального газа ($\nu = 3$ моль) его термодинамическая температура увеличилась в $n = 2$ раза. Определить изменение энтропии, если нагревание происходит: 1) изохорно; 2) изобарно. [1) 28,8 Дж/К; 2) 40,3 Дж/К]

2.82. Идеальный газ ($\nu = 2$ моль) сначала изобарно нагрели, так что объем газа увеличился в $n_1 = 2$ раза, а затем изохорно охладили, так что давление его уменьшилось в $n = 2$ раза. Определить приращение энтропии в ходе указанных процессов. [11,5 Дж/К]

2.83. Азот массой 28 г адиабатически расширили в $n = 2$ раза, а затем изобарно сжали до первоначального объема. Определить изменение энтропии газа в ходе указанных процессов [—20,2 Дж/К]

2.3. Реальные газы, жидкости и твердые тела

Основные законы и формулы

● Уравнение состояния реальных газов (уравнение Ван-дер-Ваальса) для моля газа

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT,$$

где V_m — молярный объем, a и b — постоянные Ван-дер-Ваальса, различные для разных газов.

● Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольной массы газа

$$\left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu}-b\right) = RT, \text{ или } \left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-\nu b) = \nu RT,$$

где $\nu = m/M$ — количество вещества.

● Внутреннее давление, обусловленное силами взаимодействия молекул,

$$p' = a/V_m^2.$$

● Связь критических параметров — объема, давления и температуры — с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса

$$V_к = 3b, \; p_к = a/(27b^2), \; T_к = 8a/(27Rb)$$

● Внутренняя энергия реального газа

$$U = \nu\,(C_V T - a/V_m),$$

где C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме

● Энтальпия системы

$$U_1 + p_1V_1 = U_2 + p_2V_2,$$

где индексы 1 и 2 соответствуют начальному и конечному состояниям системы.

● Поверхностное натяжение

$$\sigma = F/l, \text{ или } \sigma = \Delta E/\Delta S,$$

где F — сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости, ΔE — поверхностная энергия, связанная с площадью ΔS поверхности пленки.

● Формула Лапласа, позволяющая определить избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двоякой кривизны,

$$\Delta p = \sigma(1/R_1 + 1/R_2),$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости, радиус кривизны положителен, если центр кривизны находится внутри жидкости (выпуклый мениск), и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости (вогнутый мениск) В случае сферической поверхности

$$\Delta p = 2\sigma/R.$$

● Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r},$$

где θ — краевой угол, r — радиус капилляра; ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения.

● Закон Дюлонга и Пти

$$C_V = 3R,$$

где C_V — молярная (атомная) теплоемкость химически простых твердых тел.

● Уравнение Клапейрона — Клаузиуса, позволяющее определить изменение температуры фазового перехода в зависимости от изменения давления при равновесно протекающем процессе,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)},$$

где L — теплота фазового перехода, $(V_2 - V_1)$ — изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую; T — температура перехода (процесс изотермический).

Примеры решения задач

Задача 8. Некоторый газ количеством вещества $\nu = 1$ кмоль занимает объем $V_1 = 1$ м^3. При расширении газа до объема $V_2 = 1{,}5$ м^3 была совершена работа A против сил межмолекулярного притяжения, равная 45,3 кДж. Определить поправку a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Дано: $\nu = 1$ кмоль $= 10^3$ моль, $V_1 = 1$ м^3, $V_2 = 1{,}5$ м^3, $A = 45{,}3$ кДж $= 4{,}53 \cdot 10^4$ Дж.

Определить a.

Решение. Работа, совершаемая против сил межмолекулярного притяжения,

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p' \mathrm{d}V,$$

где $p' = \nu^2 a/V^2$ — внутреннее давление, обусловленное силами взаимодействия молекул. Таким образом,

$$A = \nu^2 a \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V^2} = \nu^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = \frac{\nu^2 a (V_2 - V_1)}{V_1 V_2},$$

откуда

$$a = \frac{A V_1 V_2}{\nu^2 (V_2 - V_1)}.$$

Вычисляя, получим $a = 0{,}136$ Н·м^4/моль^2.

Задача 9. В сосуд с ртутью опущен открытый капилляр. Разность уровней ртути в сосуде и капилляре $h = 37$ мм. Принимая плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 0{,}5$ Н/м, определить радиус кривизны ртутного мениска в капилляре.

Дано: $h = 3{,}7$ мм $= 3{,}7 \cdot 10^{-3}$ м, $\rho = 13{,}6$ г/см^3 $= 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3, $\sigma = 0{,}5$ Н/м.

Определить R.

Решение. Избыточное давление, вызванное кривизной мениска,

$$\Delta p = 2\sigma/R,$$

где σ — поверхностное натяжение; R — радиус кривизны ртутного мениска. Так как ртуть — несмачивающая жидкость, то она в капилляре опускается на такую высоту, при которой давление столба жидкости (гидростатическое давление) $\rho g h$ уравновешивается избыточным давлением Δp, т. е.

$$2\sigma/R = \rho g h,$$

где ρ — плотность ртути; g — ускорение свободного падения. Отсюда искомый радиус кривизны ртутного мениска

$$R = 2\sigma/(\rho g h).$$

Вычисляя, получим $R = 2{,}03$ мм.

Задачи

2.84. Кислород ($\nu = 10$ моль) находится в сосуде объемом $V = 5$ л. Определить: 1) внутреннее давление газа; 2) собственный объем молекул. Поправки a и b принять равными соответственно 0,136 Н·м^4/моль^2 и $3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль. [1) 544 кПа; 2) 79,3 см^3]

2.85. Углекислый газ массой 6,6 кг при давлении 0,1 МПа занимает объем 3,75 м^3. Определить температуру газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Поправки a и b принять равными соответственно 0,361 Н·м^4/моль^2 и $4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль. [1) 302 К; 2) 301 К]

2.86. Углекислый газ массой 2,2 кг находится при температуре 290 К в сосуде вместимостью 30 л. Определить давление газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Поправки a и b принять равными соответственно 0,361 Н·м^4/моль^2 и $4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль. [1) 3,32 МПа; 2) 4,02 МПа]

2.87. Плотность азота $\rho = 140$ кг/м^3, его давление $p = 10$ МПа. Определить температуру газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Поправки a и b принять равными соответственно 0,135 Н·м^4/моль^2 и $3{,}86 \times 10^{-5}$ м^3/моль. [1) 260 К; 2) 241 К]

2.88. Анализируя уравнение состояния реальных газов, определить величины поправок a и b для азота. Критические давление и температура азота соответственно равны 3,39 МПа и 126 К. [$a = 0{,}136$ Н·м^4/моль^2; $b = 3{,}86 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль]

2.89. Кислород массой 100 г расширяется от объема 5 л до объема 10 л. Определить работу межмолекулярных сил притяжения при этом расширении. Поправку a принять равной 0,136 Н·м^4/моль^2. [133 Дж]

2.90. Некоторый газ ($\nu = 0{,}25$ кмоль) занимает объем $V_1 = 1$ м^3. При расширении газа до объема $V_2 = 1{,}2$ м^3 была совершена работа против сил межмолекулярного притяжения, равная 1,42 кДж. Определить поправку a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса. [0,136 Н·м^4/моль^2]

2.91. Азот ($\nu = 3$ моль) расширяется в вакуум, в результате чего объем газа увеличивается от $V_1 = 1$ л до $V_2 = 5$ л. Какое количество теплоты Q необходимо сообщить газу, чтобы его температура осталась неизменной? Поправку a принять равной 0,135 Н·м^4/моль^2. [972 Дж]

2.92. Углекислый газ массой 88 г занимает при температуре 290 К объем 1000 см^3. Определить внутреннюю энергию газа, если: 1) газ идеальный; 2) газ реальный. Поправку a принять равной 0,361 Н·м^4/моль^2. [1) 14,5 кДж; 2) 13 кДж]

2.93. Кислород ($\nu = 2$ моль) занимает объем $V_1 = 1$ л. Определить изменение температуры кислорода, если он адиабатически расширяется в вакууме до объема $V_2 = 10$ л. Поправку a принять равной 0,136 Н·м^4/моль^2. [−11,8 К]

2.94. Азот ($\nu = 2$ моль) адиабатически расширяется в вакуум. Температура газа при этом уменьшается на 1 К. Определить работу, совершаемую газом против межмолекулярных сил притяжения. [83,1 Дж]

2.95. Кислород ($\nu = 1$ моль) (реальный газ), занимавший при $T_1 = 400$ К объем $V_1 = 1$ л, расширяется изотермически до $V_2 = 2V_1$. Определить: 1) работу при расширении; 2) изменение внутренней энергии газа. Поправки a и b принять равными соответственно 0,136 Н·м^4/моль^2 и $3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль. [1) 2,29 кДж; 2) 68 Дж]

2.96. Показать, что эффект Джоуля — Томсона будет всегда отрицательным, если дросселируется газ, для которого силами притяжения молекул можно пренебречь.

2.97. Показать, что эффект Джоуля — Томсона будет всегда положительным, если дросселируется газ, для которого можно пренебречь собственным объемом молекул.

2.98. При определении силы поверхностного натяжения капельным методом число капель глицерина, вытекающего из капилляра, составляет $n = 50$. Общая масса глицерина $m = 1$ г, а диаметр шейки капли в момент отрыва $d = 1$ мм. Определить поверхностное натяжение σ глицерина. [62 мН/м]

2.99. Определить радиус R капли спирта, вытекающей из узкой вертикальной трубки радиусом $r = 1$ мм. Считать, что в момент отрыва капля сферическая. Поверхностное натяжение спирта $\sigma = 22$ мН/м, а его плотность $\rho = 0{,}8$ г/см^3. [1,61 мм]

2.100. Считая процесс образования мыльного пузыря изотермическим, определить работу A, которую надо совершить, чтобы увеличить его диаметр от $d_1 = 6$ мм до $d_2 = 60$ мм. Поверхностное натяжение мыльного раствора принять равным 40 мН/м. [896 мкДж]

2.101. Две капли воды радиусом $r = 1$ мм каждая слились в одну большую каплю. Считая процесс изотермическим, определить уменьшение поверхностной энергии при этом слиянии, если поверхностное натяжение воды $\sigma = 73$ мН/м. [378 нДж]

2.102. Давление воздуха внутри мыльного пузыря на $\Delta p = 200$ Па больше атмосферного. Определить диаметр d пузыря. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 40$ мН/м. [1,6 мм]

2.103. Воздушный пузырек диаметром $d = 0{,}02$ мм находится на глубине $h = 25$ см под поверхностью воды. Определить давление воздуха в этом пузырьке. Атмосферное давление принять нормальным. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 73$ мН/м, а ее плотность $\rho = 1$ г/см^3. [118 кПа]

2.104. Ртуть массой 3 г помещена между двумя параллельными стеклянными пластинками. Определить силу, которую необходимо приложить, чтобы расплющить каплю до толщины $d = 0{,}1$ мм. Ртуть стекло не смачивает. Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 0{,}5$ Н/м. [22 Н]

2.105. Вертикальный капилляр погружен в воду. Определить радиус кривизны мениска, если высота столба воды в трубке $h = 20$ мм. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, поверхностное натяжение $\sigma = 73$ мН/м. [744 мкм]

2.106. Капилляр внутренним радиусом 0,5 мм опущен в жидкость. Определить массу жидкости, поднявшейся в капилляре, если ее поверхностное натяжение равно 60 мН/м. [$1{,}92 \cdot 10^{-5}$ кг]

2.107. В капилляре диаметром $d = 100$ мкм вода поднимается на высоту $h = 30$ см. Определить поверхностное натяжение σ воды, если ее плотность $\rho = 1$ г/см^3. [73 мН/м]

2.108. Широкое колено U-образного манометра имеет диаметр $d_1 = 2$ мм, узкое — $d_2 = 1$ мм. Определить разность Δh уровней ртути в обоих коленах, если поверхностное натяжение ртути $\sigma = 0{,}5$ Н/м, плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^2, а краевой угол $\vartheta = 138°$. [5,6 мм]

2.109. Изобразить элементарную ячейку ионной кубической объемноцентрированной решетки хлористого цезия ($CsCl$) и определить соответствующее этой решетке координационное число.

2.110. Изобразить элементарную ячейку ионной кубической решетки поваренной соли ($NaCl$) и определить соответствующее этой решетке координационное число.

2.111. Определить наименьшее расстояние между центрами ионов натрия и хлора в кристаллах $NaCl$ (две одинаковые гранецентрированные кубические решетки, вложенные одна в другую). Плотность поваренной соли $\rho = 2{,}2$ г/см^3. [0,28 нм]

2.112. Используя закон Дюлонга и Пти, определить удельную теплоемкость: 1) натрия; 2) алюминия. [1) 1,08 кДж/(кг·К); 2) 0,924 кДж/(кг·К)]

2.113. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, определить, во сколько раз удельная теплоемкость железа больше удельной теплоемкости золота. [3,52]

2.114. Для нагревания металлического шарика массой 10 г от 20 до 50 °C затратили количество теплоты, равное 62,8 Дж. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, определить материал шарика. [Олово, так как $M = 0,119$ кг/моль]

2.115. Изменение энтропии при плавлении 1 моль льда составило 25 Дж/К. Определить, насколько изменится температура плавления льда при увеличении внешнего давления на 1 МПа? Плотность льда $\rho_1 = 0,9$ г/см^3, воды $\rho_2 = 1$ г/см^3. [$\Delta T = -0,08$ К]

3 Электричество и магнетизм

3.1. Электростатика

Основные законы и формулы

- Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2},$$

где F — сила взаимодействия двух точечных зарядов Q_1 и Q_2 в вакууме; r — расстояние между зарядами; ε_0 — электрическая постоянная, равная $8,85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

- Напряженность и потенциал электростатического поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_0;\ \varphi = \Pi/Q_0,\ \text{или}\ \varphi = A_\infty/Q_0,$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на точечный положительный заряд Q_0, помещенный в данную точку поля; Π — потенциальная энергия заряда Q_0; A_∞ — работа перемещения заряда Q_0 из данной точки поля за его пределы.

- Напряженность и потенциал электростатического поля точечного заряда Q на расстоянии r от заряда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2};\ \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

- Поток вектора напряженности через площадку dS

$$d\Phi_E = \mathbf{E}d\mathbf{S} = E_n dS$$

где $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$ — вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с нормалью $\mathbf{n}$ к площадке; E_n — составляющая вектора $\mathbf{E}$ по направлению нормали $\mathbf{n}$ к площадке.

- Поток вектора напряженности через произвольную поверхность S

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \int_S E_n dS.$$

- Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_i;\ \varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i,$$

где $\mathbf{E}_i$, φ_i — соответственно напряженность и потенциал поля, создаваемого зарядом Q_i.

● Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi, \text{ или } \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right),$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы координатных осей.

● В случае поля, обладающего центральной или осевой симметрией,

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

● Электрический момент диполя (дипольный момент)

$$\mathbf{p} = |Q|\mathbf{l},$$

где $\mathbf{l}$ — плечо диполя.

● Линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов

$$\tau = \frac{dQ}{dl};\ \sigma = \frac{dQ}{dS};\ \rho = \frac{dQ}{dV},$$

т. е. соответственно заряд, приходящийся на единицу длины, поверхности и объема.

● Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV,$$

где ε_0 — электрическая постоянная; $\sum_{i=1}^{n} Q_i$ — алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности S; n — число зарядов; ρ — объемная плотность зарядов.

● Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью,

$$E = \sigma/(2\varepsilon_0).$$

● Напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями,

$$E = \sigma/\varepsilon_0.$$

● Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R с общим зарядом Q на расстоянии r от центра сферы,

$$E = 0 \text{ при } r < R \text{ (внутри сферы);}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \text{ при } r \geqslant R \text{ (вне сферы).}$$

● Напряженность поля, создаваемого объемно заряженным шаром радиусом R с общим зарядом Q на расстоянии r от центра шара,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r \text{ при } r \leqslant R \text{ (внутри шара);}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \text{ при } r \geqslant R \text{ (вне шара).}$$

● Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным бесконечным цилиндром радиусом R на расстоянии r от оси цилиндра,

$$E = 0 \text{ при } r < R \text{ (внутри цилиндра);}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r} \text{ при } r \geqslant R \text{ (вне цилиндра).}$$

● Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_L E_l dl = 0,$$

где E_l — проекция вектора $\mathbf{E}$ на направление элементарного перемещения $d\mathbf{l}$. Интегрирование производится по любому замкнутому пути L.

● Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда Q_0 из точки *1* в точку *2*,

$$A_{12} = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ или } A_{12} = Q_0\int_1^2 \mathbf{E}d\mathbf{l} = Q_0\int_1^2 E_l dl,$$

где E_l — проекция вектора $\mathbf{E}$ на направление элементарного перемещения $d\mathbf{l}$.

● Поляризованность

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i/V,$$

где V — объем диэлектрика; $\mathbf{p}_i$ — дипольный момент i-й молекулы.

● Связь между поляризованностью диэлектрика и напряженностью электростатического поля

$$\mathbf{P} = \varkappa\varepsilon_0\mathbf{E},$$

где $\varkappa$ — диэлектрическая восприимчивость вещества.

● Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью $\varkappa$

$$\varepsilon = 1 + \varkappa.$$

● Связь между напряженностью E поля в диэлектрике и напряженностью E_0 внешнего поля

$$E = E_0 - P/\varepsilon_0, \text{ или } E = E_0/\varepsilon.$$

● Связь между векторами электрического смещения и напряженностью электростатического поля

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}.$$

● Связь между **D**, **E** и **P**

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

● Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

$$\Phi_D = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^{n} Q_i,$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i$ — алгебраическая сумма заключенных внутри замкнутой поверхности S свободных электрических зарядов; D_n — составляющая вектора **D** по направлению нормали **n** к площадке dS, $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$ — вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с нормалью **n** к площадке. Интегрирование ведется по всей поверхности.

● Напряженность электростатического поля у поверхности проводника

$$E = \sigma/(\varepsilon_0 \varepsilon),$$

где σ — поверхностная плотность зарядов.

● Электроемкость уединенного проводника

$$C = Q/\varphi,$$

где Q — заряд, сообщенный проводнику; φ — потенциал проводника.

● Емкость плоского конденсатора

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d,$$

где S — площадь каждой пластины конденсатора; d — расстояние между пластинами.

● Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon l}{\ln (r_2/r_1)},$$

где l — длина обкладок конденсатора; r_1 и r_2 — радиусы полых коаксиальных цилиндров.

● Емкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

где r_1 и r_2 — радиусы концентрических сфер.

● Емкость системы конденсаторов при последовательном и параллельном соединении

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \text{ и } C = \sum_{i=1}^{n} C_i,$$

где C_i — емкость i-го конденсатора; n — число конденсаторов.

● Энергия уединенного заряженного проводника

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

● Энергия взаимодействия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i \varphi_i,$$

где φ_i — потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд Q_i, всеми зарядами, кроме i-го

● Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{Q\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C},$$

где Q — заряд конденсатора; C — его емкость; $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между обкладками.

● Сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками конденсатора

$$|F| = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 S}{2}.$$

● Энергия электростатического поля плоского конденсатора

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V,$$

где S — площадь одной пластины; U — разность потенциалов между пластинами; $V = Sd$ — объем конденсатора.

● Объемная плотность энергии

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2},$$

где D — электрическое смещение.

Примеры решения задач

Задача 1. Расстояние l между двумя точечными зарядами $Q_1 = 2$ нКл и $Q_2 = -3$ нКл, расположенными в вакууме, равно 20 см. Определить: 1) напряженность E; 2) потенциал φ поля, создаваемого этими зарядами в точке, удаленной от первого заряда на расстоянии $r_1 = 15$ см и от второго заряда на $r_2 = 10$ см.

Дано: $l = 20$ см $= 0{,}2$ м; $Q_1 = 2$ нКл $= 2 \cdot 10^{-9}$ Кл, $Q_2 = -3$ нКл $= -3 \cdot 10^{-9}$ Кл, $r_1 = 15$ см $= 0{,}15$ м; $r_2 = 10$ см $= 0{,}1$ м.

Определить: 1) E; 2) φ.

Решение. Согласно принципу суперпозиции,

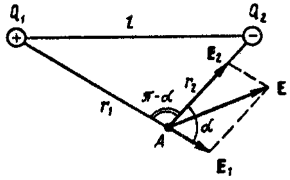


Рис. 46

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

(направления векторов показаны на рис. 46). Напряженности электрического поля, создаваемые в вакууме зарядами Q_1 и Q_2,

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}, \quad E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}. \qquad (1)$$

Модуль вектора **E** находится по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}, \qquad (2)$$

где

$$\cos\alpha = \frac{l^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = 0{,}25. \qquad (3)$$

Подставив (1) и (3) в формулу (2), найдем искомую напряженность в точке A:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{2|Q_1||Q_2|}{r_1^2r_2^2}\cos\alpha + \frac{Q_2^2}{r_2^4}}.$$

Согласно принципу суперпозиции, потенциал результирующего поля

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

где $\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$ и $\varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$ — соответственно потенциалы полей, создаваемых зарядами Q_1 и Q_2.

Подставив, найдем

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right).$$

Вычисляя, получаем: 1) $E = 3$ кВ/м; 2) $\varphi = -150$ В.

Задача 2. Электростатическое поле создается бесконечно длинным цилиндром радиусом $R = 7$ мм, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 15$ нКл/м. Определить: 1) напряженность E поля в точках, лежащих от оси цилиндра на расстояниях $r_1 = 5$ мм и $r_2 = 1$ см; 2) разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $r_3 = 1$ см и $r_4 = 2$ см от поверхности цилиндра, в средней его части.

Дано: $R = 7$ мм $= 7\cdot10^{-3}$ м, $\tau = 15$ нКл/м $= 1{,}5\times\times10^{-8}$ Кл/м, $r_1 = 5$ мм $= 5\cdot10^{-3}$ м, $r_2 = 1$ см $= 1\cdot10^{-2}$ м; $r_3 = = 1$ см $= 1\cdot10^{-2}$ м; $r_4 = 2$ см $= 2\cdot10^{-2}$ м.

Определить: 1) E_{r_1}, E_{r_2}; 2) $\varphi_3 - \varphi_4$.

Решение. Воспользуемся теоремой Гаусса

$$\oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i Q_i,$$

взяв в качестве замкнутой поверхности коаксиальный с заряженным цилиндр радиусом r и высотой l (рис. 47). Если $r < R$, то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области $E = 0$.

Поток вектора **E** сквозь торцы коаксиального цилиндра равен нулю (торцы параллельны линиям напряженности), а сквозь боковую поверхность — $2\pi rlE$. По теореме Гаусса, при $r_2 > R$ $2\pi r_2 lE = \tau l/\varepsilon_0$, откуда

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r_2}.$$

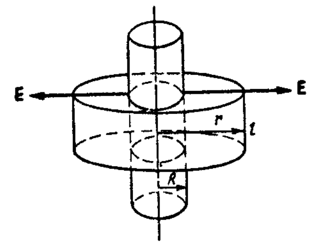


Рис. 47

Так как $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$, то полученная формула для поля с осевой симметрией запишется в виде

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \text{ или } d\varphi = -E\,dr.$$

Подставив сюда выражение для напряженности поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром $[E = \tau/(2\pi\varepsilon_0 r)]$, получим

$$d\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}.$$

Проинтегрировав это выражение, найдем искомую разность потенциалов:

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \int_{r_3+R}^{r_4+R}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_4+R}{r_3+R}.$$

Вычисляя, получаем: 1) $E_{r_1} = 0$; $E_{r_2} = 27$ кВ/м; 2) $\varphi_3 - \varphi_4 = = 125$ В.

Задача 3. Определить ускоряющую разность потенциалов, которую должен пройти в электрическом поле электрон, чтобы его скорость возросла от $v_1 = 1$ Мм/с до $v_2 = 5$ Мм/с.

Дано: $v_1 = 1$ Мм/с $= 10^6$ м/с, $v_2 = 5$ Мм/с $= 5\cdot10^6$ м/с, $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг.

Определить $\varphi_1 - \varphi_2$.

Решение. Работа, совершаемая силами электрического поля при перемещении электрона из точки *1* в точку *2*,

$$A = e(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (1)$$

С другой стороны, она равна изменению кинетической энергии электрона:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (2)$$

Приравняв выражения (1) и (2), найдем искомую ускоряющую разность потенциалов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2e}.$$

Вычисляя, получаем $\varphi_1 - \lambda_2 = 68{,}3$ В

Задача 4. К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов 1,5 кВ. Площадь пластин 150 см² и расстояние между ними 5 мм. После отключения конденсатора от источника напряжения в пространство между пластинами внесли стекло ($\varepsilon_2 = 7$). Определить: 1) разность потенциалов между пластинами после внесения диэлектрика; 2) емкость конденсатора до и после внесения диэлектрика; 3) поверхностную плотность заряда на пластинах до и после внесения диэлектрика.

Дано: $U_1 = 1{,}5$ кВ $= 1{,}5 \cdot 10^3$ В; $S = 150$ см² $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м²; $\varepsilon_1 = 1$; $d = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м; $\varepsilon_2 = 7$.

Определить: 1) U_2; 2) C_1, C_2; 3) σ_1, σ_2.

Решение. Так как $E = \sigma/(\varepsilon_0\varepsilon) = U/d$, то до внесения диэлектрика $\sigma d = U_1\varepsilon_0\varepsilon_1$ и после внесения диэлектрика $\sigma d = U_2\varepsilon_0\varepsilon_2$, поэтому

$$U_2 = \frac{\varepsilon_1 U_1}{\varepsilon_2}.$$

Емкость конденсатора до и после внесения диэлектрика

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d} \text{ и } C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d}.$$

Заряд пластин после отключения от источника напряжения не меняется, т. е. $Q = \text{const}$. Поэтому поверхностная плотность заряда на пластинах до и после внесения диэлектрика

$$\sigma_1 = \sigma_2 = Q/S = C_1U_1/S = C_2U_2/S.$$

Вычисляя, получаем: 1) $U_2 = 214$ В; 2) $C_1 = 26{,}5$ пФ; $C_2 = 186$ пФ; 3) $\sigma_1 = \sigma_2 = 2{,}65$ мкКл/м².

Задача 5. Между обкладками плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 1,5 кВ, зажата парафиновая пластинка ($\varepsilon = 2$) толщиной 5 мм. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на парафине.

Дано: $U = 1{,}5$ кВ $= 1{,}5 \cdot 10^3$ В; $\varepsilon = 2$; $d = 5$ мм $= 5 \times 10^{-3}$ м.

Определить σ'.

Решение. $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$, где $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ — соответственно векторы электрического смещения и напряженности поля плоского конденсатора; $\mathbf{P}$ — вектор поляризованности диэлектрика. Так как векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ нормальны к поверхности диэлектрика, то $D_n = D$ и $E_n = E$. Тогда можем записать $D = \varepsilon_0 E + P$, где $P = \sigma'$, т. е. равна поверхностной плотности связанных зарядов диэлектрика (учли, что $P_n = P$). Тогда

$$\sigma' = D - \varepsilon_0 E.$$

Учитывая, что $D = \varepsilon_0\varepsilon E$ и $E = U/d$, где d — расстояние между обкладками конденсатора, найдем

$$\sigma' = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)U/d.$$

Вычисляя, получаем $\sigma' = 2{,}65$ мкКл/м².

Задачи

3.1. Сила гравитационного притяжения двух водяных одинаково заряженных капель радиусами 0,1 мм уравновешивается кулоновской силой отталкивания. Определить заряд капель. Плотность воды равна 1 г/см³. [0,361 аКл]

3.2. Два заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускаются в керосин плотностью 0,8 г/см³. Какова должна быть плотность материала шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и в керосине был один и тот же? Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$. [1,6 г/см³]

3.3. В вершинах равностороннего треугольника находятся одинаковые положительные заряды $Q = 2$ нКл. Какой отрицательный заряд Q_1 необходимо поместить в центр треугольника, чтобы сила притяжения с его стороны уравновесила силы отталкивания положительных зарядов? [1,15 нКл]

3.4. Свинцовый шарик ($\rho = 11{,}3$ г/см³) диаметром 0,5 см помещен в глицерин ($\rho = 1{,}26$ г/см³). Определить заряд шарика, если в однородном электростатическом поле шарик оказался взвешенным в глицерине. Электростатическое поле направлено вертикально вверх, и его напряженность $E=4$ кВ/см. [1,61 нКл]

3.5. На некотором расстоянии от бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью $\sigma=0{,}1$ нКл/см^2 расположена круглая пластинка. Плоскость пластинки составляет с линиями напряженности угол 30°. Определить поток Φ_E вектора напряженности через эту пластинку, если ее радиус r равен 15 см. [3,46 кВ·м]

3.6. Определить поток Φ_E вектора напряженности электростатического поля через сферическую поверхность, охватывающую точечные заряды $Q_1=5$ нКл и $Q_2=-2$ нКл. [339 В·м]

3.7. Определить напряженность электростатического поля в точке A, расположенной вдоль прямой, соединяющей заряды $Q_1=10$ нКл и $Q_2=-8$ нКл и находящейся на расстоянии $r=8$ см от отрицательного заряда. Расстояние между зарядами $l=20$ см [10,1 кВ/м]

3.8. Два точечных заряда $Q_1=4$ нКл и $Q_2=-2$ нКл находятся друг от друга на расстоянии 60 см. Определить напряженность E поля в точке, лежащей посередине между зарядами. Чему равна напряженность, если второй заряд положительный? [0,6 кВ/м; 0,2 кВ/м]

3.9. Определить напряженность поля, создаваемого диполем с электрическим моментом $p=10^{-9}$ Кл·м на расстоянии $r=25$ см от центра диполя в направлении, перпендикулярном оси диполя. [576 В/м]

3.10. Расстояние l между зарядами $Q=\pm 2$ нКл равно 20 см. Определить напряженность E поля, созданного этими зарядами в точке, находящейся на расстоянии $r_1=15$ см от первого и $r_2=10$ см от второго заряда. [2,14 кВ/м]

3.11. В вершинах квадрата со стороной 5 см находятся одинаковые положительные заряды $Q=2$ нКл. Определить напряженность электростатического поля: 1) в центре квадрата; 2) в середине одной из сторон квадрата. [1) 0; 2) 1,03 кВ/м]

3.12. Кольцо радиусом $r=5$ см из тонкой проволоки равномерно заряжено с линейной плотностью $\tau=14$ нКл/м. Определить напряженность поля на оси, проходящей через центр кольца, в точке A, удаленной на расстоянии $a=10$ см от центра кольца. [2,83 кВ/м]

3.13. Определить поверхностную плотность заряда, создающего вблизи поверхности Земли напряженность $E=200$ В/м. [1,77 нКл/м^2]

3.14. Под действием электростатического поля равномерно заряженной бесконечной плоскости точечный заряд $Q=1$ нКл переместился вдоль силовой линии на расстояние $r=1$ см; при этом совершена работа 5 мкДж. Определить поверхностную плотность заряда на плоскости. [8,85 мкКл/м^2]

3.15. Электростатическое поле создается двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными равномерно одноименными зарядами с поверхностной плотностью соответственно $\sigma_1=2$ нКл/м^2 и $\sigma_2=4$ нКл/м^2. Определить напряженность электростатического поля: 1) между плоскостями; 2) за пределами плоскостей. Построить график изменения напряженности поля вдоль линии, перпендикулярной плоскостям. [1) 113 В/м; 2) 339 В/м]

3.16. Электростатическое поле создается двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными равномерно разноименными зарядами с поверхностной плотностью $\sigma_1=1$ нКл/м^2 и $\sigma_2=2$ нКл/м^2. Определить напряженность электростатического поля: 1) между плоскостями; 2) за пределами плоскостей. Построить график изменения напряженности поля вдоль линии, перпендикулярной плоскостям. [1) 169 В/м; 2) 56,5 В/м]

3.17. На металлической сфере радиусом 15 см находится заряд $Q=2$ нКл. Определить напряженность E электростатического поля: 1) на расстоянии $r_1=10$ см от центра сферы; 2) на поверхности сферы; 3) на расстоянии $r_2=20$ см от центра сферы. Построить график зависимости $E(r)$. [1) 0; 2) 800 В/м; 3) 450 В/м]

3.18. Поле создано двумя равномерно заряженными концентрическими сферами радиусами $R_1=5$ см и $R_2=8$ см. Заряды сфер соответственно равны $Q_1=2$ нКл и $Q_2=-1$ нКл. Определить напряженность электростатического поля в точках, лежащих от центра сфер на расстояниях: 1) $r_1=3$ см; 2) $r_2=6$ см; 3) $r_3=10$ см. Построить график зависимости $E(r)$. [1) 0; 2) 5 кВ/м; 3) 0,9 кВ/м]

3.19. Шар радиусом $R=10$ см заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho=10$ нКл/м^3. Определить напряженность электростатического поля: 1) на расстоянии $r_1=5$ см от центра шара; 2) на расстоянии $r_2=15$ см от центра шара. Построить зависимость $E(r)$. [1) 18,8 В/м; 2) 16,7 В/м]

3.20. Фарфоровый шар радиусом $R=10$ см заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho=15$ нКл/м^3. Определить напряженность электростатического поля: 1) на расстоянии $r_1=5$ см от центра шара; 2) на поверхности шара; 3) на расстоянии $r_2=15$ см от центра шара. Построить график зависимости $E(r)$. Диэлектрическая проницаемость фарфора $\varepsilon=5$. [1) 5,65 В/м; 2) 11,3 В/м (для $r \leqslant R$), 56,5 В/м (для $r \geqslant R$); 3) 25,1 В/м]

3.21. Длинный прямой провод, расположенный в вакууме, несет заряд, равномерно распределенный по всей длине провода с линейной плотностью 2 нКл/м. Определить напряженность E электростатического поля на расстоянии $r=1$ м от провода. [36 В/м]

3.22. Внутренний цилиндрический проводник длинного прямолинейного коаксиального провода радиусом $R_1=1{,}5$ мм заряжен с линейной плотностью $\tau_1=0{,}20$ нКл/м. Внешний цилиндрический проводник этого провода радиусом $R_2=3$ мм заряжен с линейной плотностью $\tau_2=-0{,}15$ нКл/м. Пространство между проводниками заполнено резиной ($\varepsilon=3$). Определить напряженность электростатического поля в точках, лежащих от оси провода на расстояниях: 1) $r_1=1$ мм; 2) $r_2=2$ мм; 3) $r_3=5$ мм. [1) 0; 2) 800 В/м; 3) 180 В/м]

3.23. Электростатическое поле создается положительно заряженной с постоянной поверхностной плотностью $\sigma=10$ нКл/м^2 бесконечной плоскостью. Какую работу надо совершить для того, чтобы перенести электрон вдоль линии напряженности с расстояния $r_1=2$ см до $r_2=1$ см? [$9{,}04\cdot10^{-19}$ Дж]

3.24. Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью с постоянной линейной плотностью $\tau=1$ нКл/см. Какую скорость приобретет электрон, приблизившись под действием поля к нити вдоль линии напряженности с расстояния $r_1=1{,}5$ см до $r_2=1$ см? [16 Мм/с]

3.25. Одинаковые заряды $Q=100$ нКл расположены в вершинах квадрата со стороной $a=10$ см. Определить потенциальную энергию этой системы. [4,87 мДж]

3.26. В боровской модели атома водорода электрон движется по круговой орбите радиусом $r=52{,}8$ пм, в центре которой находится протон. Определить: 1) скорость электрона на орбите; 2) потенциальную энергию электрона в поле ядра, выразив ее в электронвольтах. [1) 2,19 Мм/с; 2) $-27{,}3$ эВ]

3.27. Кольцо радиусом $r=5$ см из тонкой проволоки несет равномерно распределенный заряд $Q=10$ нКл. Определить потенциал φ электростатического поля: 1) в центре кольца; 2) на оси, проходящей через центр кольца, в точке, удаленной на расстояние $a=10$ см от центра кольца. [1) 1,8 кВ; 2) 805 В]

3.28. На кольце с внутренним радиусом 80 см и внешним — 1 м равномерно распределен заряд 10 нКл. Определить потенциал в центре кольца. [100 В]

3.29. Металлический шар радиусом 5 см несет заряд $Q=10$ нКл. Определить потенциал φ электростатического поля: 1) на поверхности шара; 2) на расстоянии $a=2$ см от его поверхности. Построить график зависимости $\varphi(r)$. [1) 1,8 кВ; 2) 1,29 кВ]

3.30. Полый шар несет на себе равномерно распределенный заряд. Определить радиус шара, если потенциал в центре шара равен $\varphi_1=200$ В, а в точке, лежащей от его центра на расстоянии $r=50$ см, $\varphi_2=40$ В. [10 см]

3.31. Электростатическое поле создается положительным точечным зарядом. Определить числовое значение и направление градиента потенциала этого поля, если на расстоянии $r=10$ см от заряда потенциал равен $\varphi=100$ В. [1 кВ/м]

3.32. Электростатическое поле создается бесконечной плоскостью, заряженной равномерно с поверхностной плотностью $\sigma=5$ нКл/м^2. Определить числовое значение и направление градиента потенциала этого поля. [282 В/м]

3.33. Электростатическое поле создается бесконечной прямой нитью, заряженной равномерно с линейной плотностью $\tau=50$ пКл/см. Определить числовое значение и направление градиента потенциала в точке на расстоянии $r=0{,}5$ м от нити. [180 В/м]

3.34. Определить линейную плотность бесконечно длинной заряженной нити, если работа сил поля по перемещению заряда $Q=1$ нКл с расстояния $r_1=5$ см до $r_2=2$ см в направлении, перпендикулярном нити, равно 50 мкДж. [303 нКл/м]

3.35. Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью. Протон, двигаясь от нити под действием поля вдоль линии напряженности с расстояния $r_1=1$ см до $r_2=5$ см, изменил свою скорость от 1 до 10 Мм/с. Определить линейную плотность заряда нити. [17,8 мкКл/м]

3.36. Электростатическое поле создается бесконечной плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м^2. Определить разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстояниях $x_1 = 20$ см и $x_2 = 50$ см от плоскости. [16,9 В]

3.37. Определить поверхностную плотность зарядов на пластинах плоского слюдяного ($\varepsilon = 7$) конденсатора, заряженного до разности потенциалов $U = 200$ В, если расстояние между его пластинами равно $d = 0{,}5$ мм. **[24,8 мкКл/м^2]**

3.38. Электростатическое поле создается равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом $R = 10$ см с общим зарядом $Q = 15$ нКл. Определить разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстояниях $r_1 = 5$ см и $r_2 = 15$ см от поверхности сферы. [360 В]

3.39. Электростатическое поле создается сферой радиусом $R = 5$ см, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м^2. Определить разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях $r_1 = 10$ см и $r_2 = 15$ см от центра сферы. [0,94 В]

3.40. Электростатическое поле создается равномерно заряженным шаром радиусом $R = 1$ м с общим зарядом $Q = 50$ нКл. Определить разность потенциалов для точек, лежащих от центра шара на расстояниях: 1) $r_1 = 1{,}5$ м и $r_2 = 2$ м; 2) $r_1' = 0{,}3$ м и $r_2' = 0{,}8$ м. [1) 75 В; 2) 124 В]

3.41. Электростатическое поле создается шаром радиусом $R = 8$ см, равномерно заряженным с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м^3. Определить разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $r_1 = 10$ см и $r_2 = 15$ см от центра шара. [0,64 В]

3.42. Электростатическое поле создается шаром радиусом $R = 10$ см, равномерно заряженным с объемной плотностью $\rho = 20$ нКл/м^3. Определить разность потенциалов между точками, лежащими внутри шара на расстояниях $r_1 = 2$ см и $r_2 = 8$ см от его центра. [2,26 В]

3.43. Электростатическое поле создается бесконечным цилиндром радиусом 8 мм, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Определить разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $r_1 = 2$ мм и $r_2 = 7$ мм от поверхности этого цилиндра. [73 В]

3.44. В однородное электростатическое поле напряженностью $E_0 = 700$ В/м перпендикулярно полю помещается бесконечная плоскопараллельная стеклянная пластина ($\varepsilon = 7$). Определить: 1) напряженность электростатического поля внутри пластины; 2) электрическое смещение внутри пластины; 3) поляризованность стекла; 4) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле. [1) 100 В/м; 2) 6,19 нКл/м^2; 3) 5,31 нКл/м^2; 4) 5,31 нКл/м^2]

3.45. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено парафином ($\varepsilon = 2$). Расстояние между пластинами $d = 8{,}85$ мм. Какую разность потенциалов необходимо подать на пластины, чтобы поверхностная плотность связанных зарядов на парафине составляла 0,1 нКл/см^2? [1 кВ]

3.46. Расстояние между пластинами плоского конденсатора составляет $d = 5$ мм. После зарядки конденсатора до разности потенциалов $U = 500$ В между пластинами конденсатора вдвинули стеклянную пластинку ($\varepsilon = 7$). Определить: 1) диэлектрическую восприимчивость стекла; 2) поверхностную плотность связанных зарядов на стеклянной пластинке [1) 6; 2) 759 нКл/м^2]

3.47. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на слюдяной пластинке ($\varepsilon = 7$) толщиной $d = 1$ мм, служащей изолятором плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 300$ В. [15,9 мкКл/м^2]

3.48. Между пластинами плоского конденсатора помещено два слоя диэлектрика — слюдяная пластинка ($\varepsilon_1 = 7$) толщиной $d_1 = 1$ мм и парафин ($\varepsilon_2 = 2$) толщиной $d_2 = 0{,}5$ мм. Определить: 1) напряженности электростатических полей в слоях диэлектрика; 2) электрическое смещение, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 500$ В. [1) $E_1 = 182$ кВ/м, $E_2 = 637$ кВ/м; 2) **$D = 11{,}3$ мкКл/м^2]**

3.49. Расстояние между пластинами плоского конденсатора составляет $d = 1$ см, разность потенциалов $U = 200$ В. Определить поверхностную плотность σ' связанных зарядов эбонитовой пластинки ($\varepsilon = 3$) толщиной $d = 8$ мм, помещенной на нижнюю пластину конденсатора. [253 нКл/м^2]

3.50. Свободные заряды равномерно распределены с объемной плотностью $\rho=5$ нКл/м^3 по шару радиусом $R=$ $=10$ см из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon=5$. Определить напряженность электростатического поля на расстояниях $r_1=5$ см и $r_2=15$ см от центра шара. [$E_1=1,88$ В/м, $E_2=$ $=8,37$ В/м]

3.51. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d=5$ мм, разность потенциалов $U=1,2$ кВ. Определить: 1) поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора; 2) поверхностную плотность связанных зарядов на диэлектрике, если известно, что диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами, $\varkappa=1$. [1) 4,24 мкКл/м^2; 2) 2,12 мкКл/м^2]

3.52. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом ($\varepsilon=7$). Расстояние между пластинами $d=5$ мм, разность потенциалов $U=1$ кВ. Определить: 1) напряженность поля в стекле; 2) поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора; 3) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле. [1) 200 кВ/м; 2) 12,4 мкКл/м^2; 3) 10,6 мкКл/м^2]

3.53. Определить расстояние между пластинами плоского конденсатора, если между ними приложена разность потенциалов $U=150$ В, причем площадь каждой пластины $S=100$ см^2, ее заряд $Q=10$ нКл. Диэлектриком служит слюда ($\varepsilon=7$). [9,29 мм]

3.54. К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов $U_1=500$ В. Площадь пластин $S=200$ см^2, расстояние между ними $d=1,5$ мм. После отключения конденсатора от источника напряжения в пространство между пластинами внесли парафин ($\varepsilon=2$). Определить разность потенциалов U_2 между пластинами после внесения диэлектрика. Определить также емкости конденсатора C_1 и C_2 до и после внесения диэлектрика. [$U_2=250$ В, $C_1=$ $=118$ пФ, $C_2=236$ пФ]

3.55. Решить предыдущую задачу для случая, когда парафин вносится в пространство между пластинами при включенном источнике напряжения. [$U_2=500$ В, $C_1=$ $=118$ пФ; $C_2=236$ пФ]

3.56. Определить емкость коаксиального кабеля длиной 10 м, если радиус его центральной жилы $r_1=1$ см, радиус оболочки $r_2=1,5$ см, а изоляционным материалом служит резина ($\varepsilon=2,5$). [3,43 пФ]

3.57. Определить напряженность электростатического поля на расстоянии $d=1$ см от оси коаксиального кабеля, если радиус его центральной жилы $r_1=0,5$ см, а радиус оболочки $r_2=1,5$ см. Разность потенциалов между центральной жилой и оболочкой $U=1$ кВ. [91 кВ/м]

3.58. Сферический конденсатор состоит из двух концентрических сфер радиусами $r_1=5$ см и $r_2=5,5$ см. Пространство между обкладками конденсатора заполнено маслом ($\varepsilon=2,2$). Определить: 1) емкость этого конденсатора; 2) шар какого радиуса, помещенный в масло, обладает такой емкостью. [1) 135 пФ; 2) 0,55 м]

3.59. Определить напряженность электростатического поля на расстоянии $x=2$ см от центра воздушного сферического конденсатора, образованного двумя шарами (внутренний радиус $r_1=1$ см, внешний — $r_2=3$ см), между которыми приложена разность потенциалов $U=1$ кВ. [37,5 кВ/м]

3.60. Два плоских воздушных конденсатора одинаковой емкости соединены параллельно и заряжены до разности потенциалов $U=300$ В. Определить разность потенциалов этой системы, если пространство между пластинами одного из конденсаторов заполнено слюдой ($\varepsilon=7$) [75 В]

3.61. Разность потенциалов между точками A и B (рис. 48) $U=9$ В. Емкости конденсаторов соответственно равны $C_1=3$ мкФ и $C_2=6$ мкФ. Определить: 1) заряды Q_1 и Q_2; 2) разности потенциалов U_1 и U_2 на обкладках каждого конденсатора. [1) $Q_1=Q_2=18$ мкКл; 2) $U_1=$ $=6$ В; $U_2=3$ В]

3.62. Емкость батареи конденсаторов, образованной двумя последовательно соединенными конденсаторами, $C=$ $=100$ пФ, а заряд $Q=20$ нКл. Определить емкость второго конденсатора, а также разности потенциалов на обкладках каждого конденсатора, если $C_1=200$ пФ. [$C_2=200$ пФ; $\Delta\varphi_1=100$ В, $\Delta\varphi_2=100$ В]

3.63. Определить емкость C батареи конденсаторов, изображенной на рис. 49. Емкость каждого конденсатора $C_i=1$ мкФ. [0,286 мкФ]

3.64. Уединенная металлическая сфера электроемкостью

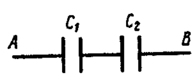


Рис. 48

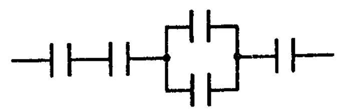


Рис. 49

$C=4$ пФ заряжена до потенциала $\varphi=1$ кВ. Определить энергию поля, заключенную в сферическом слое между сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в 4 раза больше радиуса уединенной сферы. [2 мкДж]

3.65. Две концентрические проводящие сферы радиусами $R_1=20$ см и $R_2=50$ см заряжены соответственно одинаковыми зарядами $Q=100$ нКл. Определить энергию электростатического поля, заключенного между этими сферами. [135 мкДж]

3.66. Сплошной эбонитовый шар ($\varepsilon=3$) радиусом $R=5$ см заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho=10$ нКл/м^3. Определить энергию электростатического поля, заключенную внутри шара. [0,164 пДж]

3.67. Сплошной шар из диэлектрика радиусом $R=5$ см заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho=10$ нКл/м^3. Определить энергию электростатического поля, заключенную в окружающем шар пространстве. [2,46 пДж]

3.68. Шар, погруженный в масло ($\varepsilon=2,2$), имеет поверхностную плотность заряда $\sigma=1$ мкКл/м^2 и потенциал $\varphi=500$ В. Определить: 1) радиус шара; 2) заряд шара; 3) емкость шара; 4) энергию шара. [1) 9,74 мм; 2) 1,19 нКл; 3) 2,38 пФ; 4) 0,3 мкДж]

3.69. В однородное электростатическое поле напряженностью $E_0=700$ В/м перпендикулярно полю поместили стеклянную пластинку ($\varepsilon=7$) толщиной $d=1,5$ мм и площадью 200 см^2. Определить: 1) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле; 2) энергию электростатического поля, сосредоточенную в пластине. [1) 5,31 нКл/м^2; 2) 9,29 пДж]

3.70. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C=10$ пФ заряжен до разности потенциалов $U_1=500$ В. После отключения конденсатора от источника напряжения расстояние между пластинами конденсатора было увеличено в 3 раза. Определить: 1) разность потенциалов на обкладках конденсатора после их раздвижения; 2) работу внешних сил по раздвижению пластин. [1) 1,5 кВ; 2) 2,5 мкДж]

3.71. К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов $U_1=500$ В. Площадь пластин $S=200$ см^2, расстояние между ними $d_1=1,5$ мм. Пластины раздвинули до расстояния $d_2=15$ мм. Найти энергию W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения перед раздвижением: 1) отключался; 2) не отключался. 1) $W_1=14,8$ мкДж, $W_2=148$ мкДж; 2) $W_1=14,8$ мкДж; $W_2=1,48$ мкДж]

3.72. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора $U=100$ В. Площадь каждой пластины $S=200$ см^2, расстояние между пластинами $d=0,5$ мм, пространство между ними заполнено парафином ($\varepsilon=2$). Определить силу притяжения пластин друг к другу. [7,08 мН]

3.73. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено слюдой ($\varepsilon=7$). Площадь пластин конденсатора составляет 50 см^2. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на слюде, если пластины конденсатора притягивают друг друга с силой 1 мН. [4,27 мкКл/м^2]

3.74. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом ($\varepsilon=7$). Когда конденсатор присоединили к источнику напряжения, давление пластин на стекло оказалось равным 1 Па. Определить: 1) поверхностную плотность зарядов на пластинах конденсатора; 2) электрическое смещение; 3) напряженность электростатического поля в стекле; 4) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле; 5) объемную плотность энергии электростатического поля в стекле. [1) 11,1 мкКл/м^2; 2) 11,1 мкКл/м^2; 3) 179 кВ/м; 4) 9,5 мкКл/м^2; 5) 0,992 Дж/м^3].

3.2. Постоянный электрический ток

Основные законы и формулы

- Сила и плотность электрического тока

$$I=\frac{dQ}{dt}; \quad j=\frac{I}{S},$$

где S — площадь поперечного сечения проводника.

- Плотность тока в проводнике

$$\mathbf{j}=ne\langle\mathbf{v}\rangle,$$

где $\langle\mathbf{v}\rangle$ — скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике; n — концентрация зарядов.

- Электродвижущая сила, действующая в цепи,

$$\mathscr{E}=A/Q_0, \text{ или } \mathscr{E}=\oint \mathbf{E}_{ст}d\mathbf{l},$$

где Q_0 — единичный положительный заряд; A — работа сторонних сил; $\mathbf{E}_{ст}$ — напряженность поля сторонних сил.

● Сопротивление R однородного линейного проводника, проводимость G проводника и удельная электрическая проводимость γ вещества проводника

$$R=\rho l/S;\quad G=1/R;\quad \gamma=1/\rho,$$

где ρ — удельное электрическое сопротивление; S — площадь поперечного сечения проводника; l — его длина.

● Сопротивление проводников при последовательном и параллельном соединении

$$R=\sum_{i=1}^{n}R_i \quad\text{и}\quad \frac{1}{R}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i},$$

где R_i — сопротивление i-го проводника; n — число проводников.

● Зависимость удельного сопротивления ρ от температуры

$$\rho=\rho_0(1+\alpha t),$$

где α — температурный коэффициент сопротивления.

● Закон Ома:

для однородного участка цепи

$$I=U/R;$$

для неоднородного участка цепи

$$I=(\varphi_1-\varphi_2+\mathscr{E}_{12})/R;$$

для замкнутой цепи

$$I=\mathscr{E}/R,$$

где U — напряжение на участке цепи; R — сопротивление цепи (участка цепи); $(\varphi_1-\varphi_2)$ — разность потенциалов на концах участка цепи; $\mathscr{E}_{12}$ — э. д. с. источников тока, входящих в участок; $\mathscr{E}$ — э. д. с. всех источников тока цепи.

● Закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электростатического поля.

● Работа тока за время t

$$A=IUt=I^2Rt=\frac{U^2}{R}t.$$

● Мощность тока

$$P=UI=I^2R=U^2/R.$$

● Закон Джоуля — Ленца

$$Q=I^2Rt=IUt.$$

где Q — количество теплоты, выделяющееся в участке цепи за время t.

● Закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме

$$w=jE=\gamma E^2,$$

где w — удельная тепловая мощность тока.

● Правила Кирхгофа

$$\sum_k I_k=0;\quad \sum_i I_iR_i=\sum_k \mathscr{E}_k$$

Примеры решения задач

Задача 6. Сила тока в проводнике сопротивлением $R=50$ Ом равномерно растет от $I_0=0$ до $I_{max}=3$ А за время $\tau=6$ с. Определить выделившееся в проводнике за это время количество теплоты.

Дано: $R=50$ Ом, $I_0=0$, $I_{max}=3$ А, $\tau=6$ с.

Определить Q.

Решение. Согласно закону Джоуля — Ленца для бесконечно малого промежутка времени,

$$dQ=I^2R\,dt.$$

По условию задачи сила тока равномерно растет, т. е. $I=kt$, где коэффициент пропорциональности $k=(I_{max}-I_0)/\tau=\text{const}$. Тогда можно записать

$$dQ=k^2Rt^2dt. \tag{1}$$

Проинтегрировав (1) и подставив выражение для k, найдем искомое количество теплоты:

$$Q=\int_0^{\tau}k^2Rt^2dt=\frac{1}{3}k^2R\tau^3=\frac{1}{3}\frac{(I_{max}-I_0)^2}{\tau^2}R\tau^3=$$

$$=\frac{1}{3}(I_{max}-I_0)^2R\tau.$$

Вычисляя, получим $Q=900$ Дж.

Задача 7. Определить внутреннее сопротивление источника тока, если во внешней цепи при силе тока $I_1=4$ А развивается мощность $P_1=10$ Вт, а при силе тока $I_2=6$ А — мощность $P_2=12$ Вт.

Дано: $I_1=4$ А, $P_1=10$ Вт, $I_2=6$ А, $P_2=12$ Вт.

Определить r.

Решение. Мощность, развиваемая током,

$$P_1=I_1^2R_1 \quad\text{и}\quad P_2=I_2^2R_2, \tag{1}$$

где R_1 и R_2 — сопротивление внешней цепи.

Согласно закону Ома,

$$I_1=\frac{\mathscr{E}}{R_1+r};\quad I_2=\frac{\mathscr{E}}{R_2+r},$$

где $\mathscr{E}$ — э. д. с. источника Решив эти два уравнения относительно r, получим

$$r=\frac{I_1R_1-I_2R_2}{I_2-I_1}. \qquad (2)$$

Выразив I_1R_1 и I_2R_2 из уравнений (1) и подставив в выражение (2), найдем искомое внутреннее сопротивление источника тока:

$$r=\frac{P_1/I_1-P_2/I_2}{I_2-I_1}.$$

Вычисляя, получаем $r=0{,}25$ Ом.

Задача 8. Определить плотность j электрического тока в медном проводе (удельное сопротивление $\rho=17$ нОм·м), если удельная тепловая мощность тока $w=1{,}7$ Дж/(м^3·с).

Дано: $\rho=17$ нОм·м$=1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м, $w=1{,}7$ Дж/(м^3·с).

Определить j.

Решение. Согласно законам Джоуля—Ленца и Ома в дифференциальной форме,

$$w=\gamma E^2=E^2/\rho; \qquad (1)$$

$$j=\gamma E=E/\rho, \qquad (2)$$

где γ и ρ — соответственно удельные проводимость и сопротивление проводника. Из закона (2) получим, что $E=\rho j$. Подставив это выражение в (1), найдем искомую плотность тока:

$$j=\sqrt{w/\rho}.$$

Вычисляя, получим $j=10$ кА/м^3.

Задачи

3.75. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от $I_0=0$ до $I=2$ А в течение времени $t=5$ с. Определить заряд, прошедший в проводнике. [5 Кл]

3.76. Определить плотность тока, если за 2 с через проводник сечением 1,6 мм^2 прошло $2\cdot10^{19}$ электронов. [1 А/мм^2]

3.77. По медному проводнику сечением 0,8 мм^2 течет ток 80 мА. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, предполагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Плотность меди $\rho=8{,}9$ г/см^3. [7,41 мкм/с]

3.78. Определить суммарный импульс электронов в прямом

проводе длиной $l=500$ м, по которому течет ток $I=20$ А. [$5{,}69\cdot10^{-8}$ кг·м/с]

3.79. Определить общее сопротивление между точками A и B цепи, представленной на рис. 50, если $R_1=1$ Ом, $R_2=3$ Ом, $R_3=R_4=R_6=2$ Ом, $R_5=4$ Ом. [1,2 Ом]

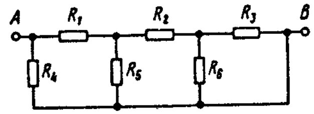


Рис. 50

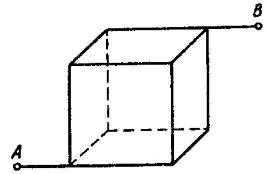


Рис. 51

3.80. Определить сопротивление проволочного каркаса, имеющего форму куба, если он включен в цепь между точками A и B (рис. 51). Сопротивление каждого ребра каркаса $r=3$ Ом. [2,5 Ом]

3.81. Вольтметр, включенный в сеть последовательно с сопротивлением R_1, показал напряжение $U_1=198$ В, а при включении последовательно с сопротивлением $R_2=$ $=2R_1-U_2=180$ В. Определить сопротивление R_1 и напряжение в сети, если сопротивление вольтметра $r=900$ Ом. [100 Ом, 220 В]

3.82. В цепи на рис. 52 амперметр показывает силу тока $I=1{,}5$ А. Сила тока через сопротивление R_1 равна $I_1=$ $=0{,}5$ А. Сопротивления $R_2=$ $=2$ Ом, $R_3=6$ Ом. Определить сопротивление R_1, а также силу токов I_2 и I_3, протекающих через сопротивление R_2 и R_3. [$R_1=3$ Ом, $I_2=0{,}75$ А, $I_3=0{,}25$ А]

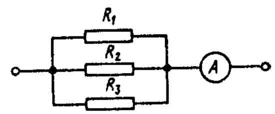


Рис. 52

3.83. Лампа накаливания потребляет ток, равный 0,6 А. Температура вольфрамовой нити диаметром 0,1 мм равна 2200 °С. Ток подводится медным проводом сечением 6 мм^2. Определить напряженность электрического поля: 1) в вольфраме (удельное сопротивление при 0 °С $\rho_0=55$ нОм·м, температурный коэффициент сопротивления $\alpha=0{,}0045$ °С$^{-1}$); 2) в меди ($\rho=17$ нОм·м). [1) 1,7 мВ/м; 2) 45,8 В/м]

3.84. По алюминиевому проводу сечением $S=0{,}2$ мм^2 течет ток $I=0{,}2$ А. Определить силу, действующую на отдельные свободные электроны со стороны электрического поля. Удельное сопротивление алюминия $\rho=26$ нОм·м $[4{,}16\cdot10^{-21}$ Н$]$

3.85. Электрическая плитка мощностью 1 кВт с нихромовой спиралью предназначена для включения в сеть с напряжением 220 В. Сколько метров проволоки диаметром 0,5 мм надо взять для изготовления спирали, если температура нити составляет 900 °С? Удельное сопротивление нихрома при 0 °С $\rho_0=1$ мкОм·м, а температурный коэффициент сопротивления $\alpha=0{,}4\cdot10^{-3}$ К$^{-1}$. [6,99 м]

3.86. Два цилиндрических проводника одинаковой длины и одинакового сечения, один из меди, а другой из железа, соединены параллельно. Определить отношение мощностей токов для этих проводников. Удельные сопротивления меди и железа равны соответственно 17 и 98 нОм·м. [5,76]

3.87. Сила тока в проводнике сопротивлением $R=120$ Ом равномерно возрастает от $I_0=0$ до $I_{max}=5$ А за время $\tau=15$ с. Определить выделившееся за это время в проводнике количество теплоты. [15 кДж]

3.88. Сила тока в проводнике сопротивлением $R=100$ м равномерно убывает от $I_0=10$ А до $I=0$ за время $\tau=30$ с. Определить выделившееся за это время в проводнике количество теплоты [100 кДж]

3.89. Определить напряженность электрического поля в алюминиевом проводнике объемом $V=10$ см^3, если при прохождении по нему постоянного тока за время $t=5$ мин выделилось количество теплоты $Q=2{,}3$ кДж. Удельное сопротивление алюминия $\rho=26$ нОм·м. [0,141 В/м]

3.90. Плотность электрического тока в медном проводе равна 10 А/см^2. Определить удельную тепловую мощность тока, если удельное сопротивление меди $\rho=17$ нОм·м. [170 Дж/(м^3·с)]

3.91. Определить ток короткого замыкания источника э. д. с., если при внешнем сопротивлении $R_1=50$ Ом ток в цепи $I_1=0{,}2$ А, а при $R_2=110$ Ом — $I_2=0{,}1$ А. [1,2 А]

3.92. В цепь, состоящую из батареи и резистора сопротивлением $R=8$ Ом, включают вольтметр, сопротивление которого $R_V=800$ Ом, один раз последовательно резистору, другой раз — параллельно. Определить внутреннее сопротивление батареи, если показания вольтметра в обоих случаях одинаковы. [0,08 Ом]

3.93. На рис. 53 $R_1=R_2=R_3=100$ Ом. Вольтметр показывает $U_V=200$ В, сопротивление вольтметра $R_V=800$ Ом.

Определить э. д. с. батареи, пренебрегая ее сопротивлением. [325 В]

3.94. На рис. 54 сопротивление потенциометра $R=2000$ Ом, внутреннее сопротивление вольтметра $R_V=5000$ Ом, $U_0=220$ В. Определить показание вольтметра, если подвижный контакт находится посередине потенциометра. [100 В]

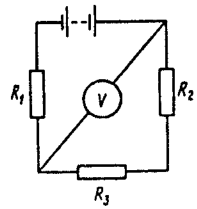


Рис. 53

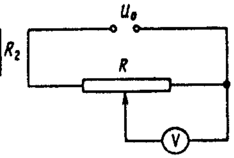


Рис. 54

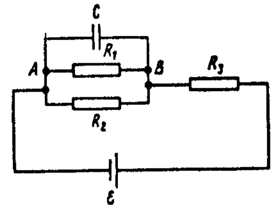


Рис. 55

3.95. Определить: 1) э. д. с. $\mathscr{E}$; 2) внутреннее сопротивление r источника тока, если во внешней цепи при силе тока 4 А развивается мощность 10 Вт, а при силе тока 2 А мощность 8 Вт. [1) $\mathscr{E}=5{,}5$ В; 2) $r=0{,}75$ Ом]

3.96. Даны четыре элемента с э. д. с. $\mathscr{E}=1{,}5$ В и внутренним сопротивлением $r=0{,}2$ Ом. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить от собранной батареи наибольшую силу тока во внешней цепи, имеющей сопротивление $R=0{,}2$ Ом? Определить максимальную силу тока. [2 параллельно, 2 последовательно; 7,5 А]

3.97. На рис. 55 $R_1=R_2=50$ Ом, $R_3=100$ Ом, $C=50$ нФ. Определить э. д. с. источника, пренебрегая его внутренним сопротивлением, если заряд на конденсаторе $Q=2{,}2$ мкКл. [220 В]

3.98. На рис. 56 $R_1=R$, $R_2=2R$, $R_3=3R$, $R_4=4R$. Определить заряд на конденсаторе. [$17U_0C/29$]

3.99. В плоский конденсатор (рис. 57), расстояние между пластинами которого $d=5$ мм, вдвигают стеклянную

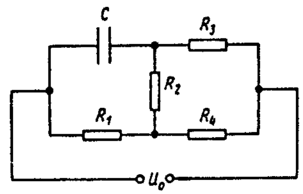


Рис. 56

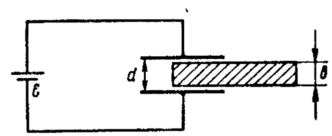


Рис. 57

пластину ($\varepsilon=7$) с постоянной скоростью $v=50$ мм/с. Толщина пластины $b=4{,}5$ мм, э. д. с. батареи $\mathscr{E}=220$ В. Определить силу тока в цепи батареи, подключенной к конденсатору. [52,6 пА]

3.100. Два источника тока с э. д. с. $\mathscr{E}_1=2$ В и $\mathscr{E}_2=1{,}5$ В и внутренними сопротивлениями $r_1=0{,}5$ Ом и $r_2=$ $=0{,}4$ Ом включены параллельно сопротивлению $R=$ $=2$ Ом (рис. 58). Определить силу тока через это сопротивление [0,8 А]

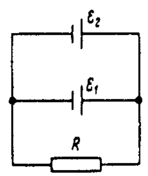


Рис. 58

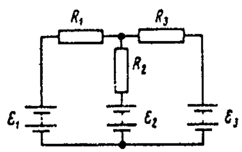


Рис. 59

3.101. На рис. 59 $\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_3$, $R_1=48$ Ом, $R_2=24$ Ом, падение напряжения U_2 на сопротивлении R_2 равно 12 В. Пренебрегая внутренним сопротивлением элементов, определить: 1) силу тока во всех участках цепи; 2) сопротивление R_3. [1) $I_1=0{,}25$ А, $I_2=0{,}5$ А, $I_3=0{,}75$ А; 2) $R_3=16$ Ом]

3.102. На рис. 60 $\mathscr{E}=2$ В, $R_1=60$ Ом, $R_2=40$ Ом, $R_3=$ $=R_4=20$ Ом и $R_G=100$ Ом. Определить силу тока I_G, протекающего через гальванометр [0,15 мА]

3.103. На рис. 61 $\mathscr{E}_1=10$ В, $\mathscr{E}_2=20$ В, $\mathscr{E}_3=40$ В, а сопротивления $R_1=R_2=R_3=R=10$ Ом. Определить силу токов, протекающих через сопротивление (I) и через источники э. д. с (I'). Внутренние сопротивления источников э. д. с. не учитывать. [$I_1=1$ А, $I_2=3$ А, $I_3=2$ А, $I'_1=2$ А, $I'_2=0$, $I'_3=3$ А]

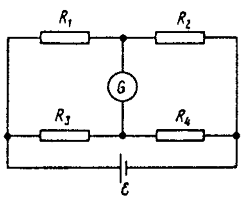


Рис. 60

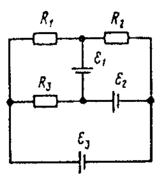


Рис. 61

3.3. Электрические токи в металлах, в вакууме и газах

Основные законы и формулы

- Контактная разность потенциалов на границе двух металлов *1* и *2*

$$\varphi_1-\varphi_2=-\frac{A_1-A_2}{e}+\frac{kT}{e}\ln\frac{n_1}{n_2},$$

где A_1, A_2 — работы выходов свободных электронов из металлов; k — постоянная Больцмана; n_1, n_2 — концентрации свободных электронов в металлах.

- Термоэлектродвижущая сила

$$\mathscr{E}=\frac{k}{e}(T_1-T_2)\ln\frac{n_1}{n_2},$$

где (T_1-T_2) — разность температур спаев.

- Формула Ричардсона — Дешмана

$$j_{\text{нас}}=CT^2e^{-A/(kT)},$$

где $j_{\text{нас}}$ — плотность тока насыщения термоэлектронной эмиссии; C — постоянная, теоретически одинаковая для всех металлов; A — работа выхода электрона из металла.

Примеры решения задач

Задача 9. Термоэлемент сопротивлением $R=12$ Ом замкнут на микроамперметр, внутреннее сопротивление которого $r=200$ Ом. Определить постоянную термоэлемента, если при разности температур его спаев, равной 120 К, микроамперметр показывает 30 мкА.

Дано: $R=12$ Ом, $r=200$ Ом, $\Delta T=120$ К, $I=30$ мкА$=$ $=3\cdot10^{-5}$ А.

Определить α.

Решение. Согласно закону Ома, сила тока в цепи термоэлемента

$$I=\frac{\mathscr{E}_T}{R+r}, \qquad (1)$$

где $\mathscr{E}_T$ — термо-э. д. с.

Термо-э. д. с.

$$\mathscr{E}_T=\alpha\Delta T, \qquad (2)$$

где α — постоянная термоэлемента; ΔT — разность температур спаев. Исходя из (1) и (2), найдем искомую постоянную термоэлемента:

$$\alpha = \frac{I(R+r)}{\Delta T}.$$

Вычисляя, получаем $\alpha = 53$ мкВ/К.

Задачи

3.104. Определить минимальную скорость электрона, необходимую для ионизации атома водорода, если потенциал ионизации атома водорода $U_i = 13{,}6$ В. [2,18 Мм/с]

3.105. Отношение работ выхода электронов из платины и цезия $A_{Pt}/A_{Cs} = 1{,}58$. Определить отношение минимальных скоростей теплового движения электронов, вылетающих из этих металлов. [1,26]

3.106. Работа выхода электрона из металла $A = 2{,}5$ эВ. Определить скорость вылетающего из металла электрона, если он обладает энергией $W = 10^{-18}$ Дж. [1,15 Мм/с]

3.107. Термопара железо — константан, постоянная которой $\alpha = 5{,}3 \cdot 10^{-5}$ В/К и сопротивление $R = 15$ Ом, замкнута на гальванометр. Один спай термопары находится в сосуде с тающим льдом, а второй помещен в среду, температура которой не известна. Определить эту температуру, если ток через гальванометр $I = 0{,}2$ мА, а внутреннее сопротивление гальванометра $r = 150$ Ом. [896 К]

3.108. Термопара $\mathscr{E}_T$ (железо — константан) и соединенный с нею последовательно гальванометр включены, как показано на рис. 62, где $\mathscr{E}$ — батарея с э.д.с, равной 1,5 В. Полное сопротивление потенциометра равно 15 кОм. Холодный спай термопары находится в сосуде с тающим льдом. Постоянная термопары $\alpha = 5{,}3 \times 10^{-5}$ В/К. Определить температуру горячего спая термопары, если при сопротивлении $R_{AB} = 150$ Ом сила тока в цепи гальванометра равна нулю. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь. [556 К]

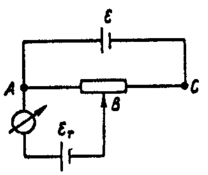


Рис. 62

3.109. Определить работу выхода электронов из металла, если плотность тока насыщения двухэлектродной лампы при температуре T_1 равна j_1, а при температуре T_2 равна j_2. $\left[A = \dfrac{kT_1T_2 \ln\left[\dfrac{j_1}{j_2}\dfrac{T_2^2}{T_1^2}\right]}{T_1 - T_2}\right]$

3.110. Вывести формулу для скорости изменения плотности термоэлектронного тока насыщения с температурой.

3.111. Ток насыщения при несамостоятельном разряде $I_{нас} = 6{,}4$ пА. Найти число пар ионов, создаваемых в 1 с внешним ионизатором. $[2 \cdot 10^7]$

3.112. Потенциал ионизации атома водорода $U_i = 13{,}6$ В. Определить температуру, при которой атомы водорода имеют среднюю кинетическую энергию поступательного движения, достаточную для ионизации. [105 кК]

3.113. Определить температуру, соответствующую средней кинетической энергии поступательного движения электронов, равной работе выхода из вольфрама, если поверхностный скачок потенциала для вольфрама 4,5 В. [34,8 кК]

3.4. Магнитное поле

Основные законы и формулы

● Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}],$$

где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, $\mathbf{p}_m$ — магнитный момент контура с током:

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n},$$

где S — площадь контура с током; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности контура.

● Связь магнитной индукции $\mathbf{B}$ и напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H},$$

где μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды.

● Закон Био — Савара — Лапласа

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3},$$

где $d\mathbf{B}$ — магнитная индукция поля, создаваемая элементом длины $d\mathbf{l}$ проводника с током I; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный от $d\mathbf{l}$ к точке, в которой определяется магнитная индукция.

● Модуль вектора $\mathrm{d}\mathbf{B}$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2},$$

где α — угол между векторами $\mathrm{d}\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$.

● Принцип суперпозиции (наложения) магнитных полей

$$\mathbf{B}=\sum_i \mathbf{B}_i,$$

где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция результирующего поля; $\mathbf{B}_i$ — магнитные индукции складываемых полей.

● Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током,

$$B=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I}{R},$$

где R — расстояние от оси проводника.

● Магнитная индукция в центре кругового проводника с током

$$B=\mu_0\mu\frac{I}{2R},$$

где R — радиус кривизны проводника.

● Закон Ампера

$$\mathrm{d}\mathbf{F}=I[\mathrm{d}\mathbf{l}, \mathbf{B}],$$

где $\mathrm{d}\mathbf{F}$ — сила, действующая на элемент длины $\mathrm{d}\mathbf{l}$ проводника с током I, помещенный в магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$.

● Модуль силы Ампера

$$\mathrm{d}F=IB\mathrm{d}l\sin\alpha,$$

где α — угол между векторами $\mathrm{d}\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$.

● Сила взаимодействия двух прямых бесконечных прямолинейных параллельных проводников с токами I_1 и I_2

$$\mathrm{d}F=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{R}\mathrm{d}l,$$

где R — расстояние между проводниками; $\mathrm{d}l$ — отрезок проводника.

● Магнитное поле точечного заряда Q, свободно движущегося с нерелятивистской скоростью $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{Q[\mathbf{v}\mathbf{r}]}{r^3},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный от заряда к точке наблюдения.

● Модуль магнитной индукции

$$B=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{Qv}{r^2}\sin\alpha,$$

где α — угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$.

● Сила Лоренца

$$\mathbf{F}=Q[\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на заряд Q, движущийся в магнитном поле со скоростью $\mathbf{v}$.

● Формула Лоренца

$$\mathbf{F}=Q\mathbf{E}+Q[\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

где $\mathbf{F}$ — результирующая сила, действующая на движущийся заряд Q, если на него действует электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}$ и магнитное поле индукцией $\mathbf{B}$.

● Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi=R\frac{IB}{d},$$

где B — магнитная индукция; I — сила тока; d — толщина пластинки; $R=1/(en)$ — постоянная Холла (n — концентрация электронов).

● Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора $\mathbf{B}$)

$$\oint_L \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{l}=\oint_L B_l\mathrm{d}l=\mu_0\sum_{k=1}^{n} I_k,$$

где μ_0 — магнитная постоянная; $\mathrm{d}\mathbf{l}$ — вектор элементарной длины контура, направленной вдоль обхода контура; $B_l=B\cos\alpha$ — составляющая вектора $\mathbf{B}$ в направлении касательной контура L произвольной формы (с учетом выбранного направления обхода); α — угол между векторами $\mathbf{B}$ и $\mathrm{d}\mathbf{l}$; $\sum_{k=1}^{n} I_k$ — алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром.

● Магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме), имеющего N витков,

$$B=\mu_0NI/l,$$

где l — длина соленоида.

● Магнитная индукция поля внутри тороида (в вакууме)

$$B=\mu_0NI/2\pi r.$$

● Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) через площадку $\mathrm{d}S$

$$\mathrm{d}\Phi_B=\mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{S}=B_n\mathrm{d}S,$$

где $\mathrm{d}\mathbf{S}=\mathrm{d}S\mathbf{n}$ — вектор, модуль которого равен $\mathrm{d}S$, а направление совпадает с нормалью $\mathbf{n}$ к площадке; B_n — проекция вектора $\mathbf{B}$ на направление нормали к площадке

● Поток вектора магнитной индукции через произвольную поверхность S

$$\Phi_B=\int_S \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{S}=\int_S B_n\mathrm{d}S.$$

● Потокосцепление (полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида)

$$\Phi=\mu_0\mu\frac{N^2I}{l}S,$$

где μ — магнитная проницаемость среды.

● Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$$dA=Id\Phi,$$

где $d\Phi$ — магнитный поток, пересеченный движущимся проводником

● Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

$$dA=Id\Phi',$$

где $d\Phi'$ — изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

Примеры решения задач

Задача 10. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, расстояние между которыми $d=15$ см, текут токи $I_1=70$ А и $I_2=50$ А в одном направлении. Определить магнитную индукцию B в точке, удаленной на $r_1=10$ см от первого и $r_2=20$ см от второго проводника.

Дано: $d=15$ см $=0,15$ м, $I_1=70$ А, $I_2=50$ А, $r_1=10$ см $=0,1$ м, $r_2=20$ см $=0,2$ м.

Определить B.

Решение. Согласно принципу суперпозиции, магнитная индукция в точке A (рис. 63)

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2,$$

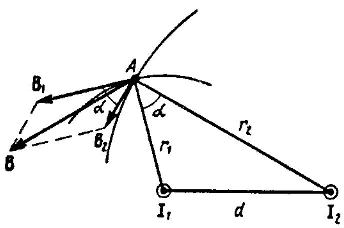


Рис. 63

где $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ — соответственно магнитные индукции полей, создаваемые проводниками с токами I_1 и I_2 (направления векторов $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ и токов I_1 и I_2 показаны на рисунке). Модуль вектора $\mathbf{B}$, по теореме косинусов,

$$B=\sqrt{B_1^2+B_2^2+2B_1B_2\cos\alpha},\quad (1)$$

где $B_1=\mu_0I_1/(2\pi r_1)$; $B_2=\mu_0I_2/(2\pi r_2)$; $\cos\alpha=(r_1^2+r_2^2-d^2)/(2r_1r_2)$.

Подставив эти выражения в формулу (1), найдем искомое B:

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\frac{I_1^2}{r_1^2}+\frac{I_2^2}{r_2^2}+\frac{I_1I_2}{r_1^2r_2^2}(r_1^2+r_2^2-d^2)}.$$

Вычисляя, получаем $B=178$ мкТл.

Задача 11. По двум параллельным прямым проводникам длиной $l=2$ м каждый, находящимся в вакууме на расстоянии $d=10$ см друг от друга, в противоположных направлениях текут токи $I_1=50$ А и $I_2=100$ А. Определить силу взаимодействия токов.

Дано: $l=2$ м, $d=10$ см $=0,1$ м, $I_1=50$ А, $I_2=100$ А.

Определить F.

Решение. Согласно закону Ампера, на каждый элемент длины проводника dl с током I_2 действует в магнитном поле, создаваемом током I_1, сила

$$dF_1=I_2B_1dl \quad (1)$$

(ее направление определено по правилу левой руки и указано на рис. 64). Аналогичные рассуждения (ток I_1 находится в магнитном поле, создаваемом током I_2) приводят к выражению

$$dF_2=I_1B_2dl. \quad (2)$$

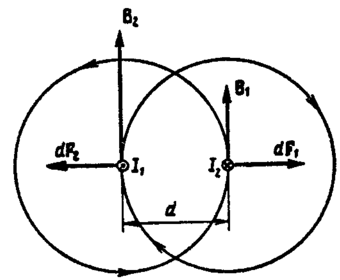


Рис. 64

Модули магнитных индукций B_1 и B_2 (направления векторов $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ см. на рис. 64) определяются соотношениями

$$B_1=\mu_0I_1/(2\pi d);\quad B_2=\mu_0I_2/(2\pi d).$$

Подставив эти выражения в (1) и (2), получим, что по модулю

$$dF_1=dF_2=\frac{\mu_0I_1I_2}{2\pi d}dl=dF \quad (3)$$

(направления сил указаны на рисунке).

Проинтегрировав выражение (3), найдем искомую силу взаимодействия токов:

$$F=\frac{\mu_0I_1I_2}{2\pi d}\int_0^l dl=\frac{\mu_0I_1I_2}{2\pi d}l.$$

Вычисляя, получаем $F=20$ мН.

Задача 12. Электрон, влетев в однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B=30$ мТл, движется по окружности радиусом $R=10$ см. Определить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

Дано: $B=30$ мТл $=3\cdot10^{-2}$ Тл, $R=10$ см $=0{,}1$ м, $m=9{,}11\cdot10^{-31}$ кг.

Решение. Так как движение электрона по окружности эквивалентно круговому току, то магнитный момент кругового тока

$$p_m=IS=\frac{|e|}{T}S, \qquad (1)$$

где e — заряд электрона; T — период обращения электрона; S — площадь, ограниченная окружностью, описываемой электроном; $T=2\pi R/v$ (v — скорость электрона); $S=\pi R^2$.

Согласно второму закону Ньютона,

$$ma_n=F_Л, \quad \text{или} \quad mv^2/R=|e|vB \qquad (2)$$

(сила Лоренца перпендикулярна вектору скорости и сообщает электрону нормальное ускорение). Из выражения (2) получим, что скорость $v=|e|BR/m$. Тогда $T=2\pi m/(|e|B)$.

Подставив выражения для T и S в формулу (1), получим искомый магнитный момент эквивалентного кругового тока:

$$p_m=\frac{|e^2|BR^2}{2m}.$$

Вычисляя, получим $p_m=4{,}21$ пА$\cdot$м^2.

Задача 13. Магнитная индукция B на оси тороида без сердечника (внешний диаметр тороида $d_1=60$ см, внутренний — $d_2=40$ см), содержащего $N=200$ витков, составляет 0,16 мТл. Пользуясь теоремой о циркуляции вектора **B**, определить силу тока в обмотке тороида.

Дано: $d_1=60$ см $=0{,}6$ м; $d_2=40$ см $=0{,}4$ м, $B=0{,}16$ мТл $=1{,}6\cdot10^{-4}$ Тл, $N=200$.

Определить I.

Решение. Циркуляция вектора B

$$\oint_L \mathbf{B}\,d\mathbf{l}=\oint_L B_l\,dl=\mu_0\sum I_к, \qquad (1)$$

т. е. равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, вдоль которого вычисляется циркуляция, умноженной на магнитную постоянную. В качестве контура выберем окружность, расположенную так же, как и линия магнитной индукции, т. е. окружность некоторым радиусом r, центр

которой расположен на оси тороида. Из условия симметрии следует, что модуль вектора **B** во всех точках линии магнитной индукции одинаков, а поэтому выражение (1) можно записать в виде

$$\oint_L \mathbf{B}\,d\mathbf{l}=B\oint_0^{2\pi r} dl=2\pi rB=\mu_0 NI \qquad (2)$$

(учли, что сила тока во всех витках одинакова, а контур охватывает число токов, равное числу витков тороида). Для средней линии тороида $R=(d_1+d_2)/4$. Подставив R в (2), получим искомую силу тока:

$$I=\frac{\pi(d_1+d_2)B}{2\mu_0 N}.$$

Вычисляя, получаем $I=1$ А.

Задачи

3.114. В однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл помещена квадратная рамка площадью $S=25$ см^2. Нормаль к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол 60°. Определить вращающий момент, действующий на рамку, если по ней течет ток $I=1$ А. [217 мкН$\cdot$м]

3.115. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}5$ Тл находится прямоугольная рамка длиной $a=8$ см и шириной $b=5$ см, содержащая $N=100$ витков тонкой проволоки. Ток в рамке $I=1$ А, а плоскость рамки параллельна линиям магнитной индукции. Определить: 1) магнитный момент рамки; 2) вращающий момент, действующий на рамку. [1) 0,4 А$\cdot$м^2; 2) 0,2 Н$\cdot$м]

3.116. В однородном магнитном поле с индукцией $B=1$ Тл находится квадратная рамка со стороной $a=10$ см, по которой течет ток $I=4$ А. Плоскость рамки перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить работу A, которую необходимо затратить для поворота рамки относительно оси, проходящей через середину ее противоположных сторон: 1) на 90°; 2) на 180°; 3) на 360°. [1) 0,04 Дж; 2) 0,08 Дж; 3) 0]

3.117. Тонкое кольцо массой 10 г и радиусом $R=8$ см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Кольцо равномерно вращается с частотой $n = 15\ с^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через ее центр. Определить: 1) магнитный момент p_m кругового тока, создаваемого кольцом; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса кольца. [1) 1,52 нА·м^2; 2) 251 нКл/кг]

3.118. Принимая, что электрон в атоме водорода движется по круговой орбите, определить отношение магнитного момента p_m эквивалентного кругового тока к моменту импульса L орбитального движения электрона. [87,8 ГКл/кг]

3.119. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого отрезком бесконечно длинного провода, в точке, равноудаленной от концов отрезка и находящейся на расстоянии $R = 4$ см от его середины. Длина отрезка провода $l = 20$ см, а сила тока в проводе $I = 10$ А. [46,4 мкТл]

3.120. Определить индукцию магнитного поля в центре проволочной квадратной рамки со стороной $a = 15$ см, если по рамке течет ток $I = 5$ А. [9,43 мкТл]

3.121. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам, находящимся на расстоянии $AB = 10$ см друг от друга в вакууме, текут токи $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А одинакового направления. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого токами в точках, лежащих на прямой, соединяющих оба провода, если: 1) точка C лежит на расстоянии $r_1 = 2$ см левее левого провода; 2) точка D лежит на расстоянии $r_2 = 3$ см правее правого провода; 3) точка G лежит на расстоянии $r_3 = 4$ см правее левого провода. [1) 0,25 мТл; 2) 0,23 мТл; 3) 0]

3.122. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, расстояние между которыми $d = 20$ см, текут токи $I_1 = 40$ А и $I_2 = 80$ А в одном направлении. Определить магнитную индукцию B в точке A, удаленной от первого проводника на $r_1 = 12$ см и от второго — на $r_2 = 16$ см. [120 мкТл]

3.123. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, расстояние между которыми $d = 15$ см, текут токи $I_1 = 70$ А и $I_2 = 50$ А в противоположных направлениях. Определить магнитную индукцию B в точке A, удаленной на $r_1 = 20$ см от первого и $r_2 = 30$ см от второго проводника. [142,8 мкТл]

3.124. Напряженность H магнитного поля в центре кругового витка с магнитным моментом $p_m = 1,5$ А·м^2 равна 150 А/м. Определить: 1) радиус витка; 2) силу тока в витке. [1) 11,7 см; 2) 35,1 А]

3.125. Определить магнитную индукцию в центре кругового проволочного витка радиусом $R = 10$ см, по которому течет ток $I = 1$ А. [6,28 мкТл]

3.126. Определить магнитную индукцию на оси тонкого проволочного кольца радиусом $R = 5$ см, по которому течет ток $I = 10$ А, в точке A, расположенной на расстоянии $d = 10$ см от центра кольца. [112 мкТл]

3.127. Определить магнитную индукцию B_A на оси тонкого проволочного кольца радиусом $R = 10$ см, в точке, расположенной на расстоянии $d = 20$ см от центра кольца, если в центре кольца $B = 50$ мкТл. [4,47 мкТл]

3.128. Круговой виток радиусом $R = 15$ см расположен относительно бесконечно длинного провода так, что его плоскость параллельна проводу. Перпендикуляр, восставленный на провод из центра витка, является нормалью к плоскости витка. Сила тока в проводе $I_1 = 1$ А, сила тока в витке $I_2 = 5$ А. Расстояние от центра витка до провода $d = 20$ см. Определить магнитную индукцию в центре витка. [21,2 мкТл]

3.129. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,2$ Тл находится прямой проводник длиной $l = 15$ см, по которому течет ток $I = 5$ А. На проводник действует сила $F = 0,13$ Н. Определить угол α между направлениями тока и вектором магнитной индукции. [60°]

3.130. По прямому горизонтально расположенному проводу пропускают ток $I_1 = 10$ А. Под ним на расстоянии $R = 1,5$ см находится параллельный ему алюминиевый провод, по которому пропускают ток $I_2 = 1,5$ А. Определить, какова должна быть площадь поперечного сечения алюминиевого провода, чтобы он удерживался незакрепленным. Плотность алюминия $\rho = 2,7$ г/см^3. [$7,55 \cdot 10^{-9}$ м^2]

3.131. Два бесконечных прямолинейных параллельных проводника с одинаковыми токами, текущими в одном направлении, находятся друг от друга на расстоянии R. Чтобы их раздвинуть до расстояния $2R$, на каждый сантиметр длины проводника затрачивается работа $A = 138$ нДж. Определить силу тока в проводниках [10 А]

3.132. Контур из провода, изогнутого в форме квадрата

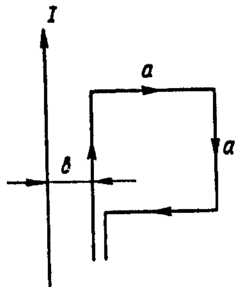


Рис. 65

(рис. 65) со стороной $a = 0,5$ м, расположен в одной плоскости с бесконечным прямолинейным проводом с током $I = 5$ А так, что две его стороны параллельны проводу. Сила тока в контуре $I_1 = 1$ А. Определить силу, действующую на контур, если ближайшая к проводу сторона контура находится на расстоянии $b = 10$ см. Направления токов указаны на рисунке. [4,17 мкН]

3.133. Прямоугольная рамка со сторонами $a = 40$ см и $b = 30$ см расположена в одной плоскости с бесконечным прямолинейным проводом с током $I = 6$ А так, что длинные стороны рамки параллельны проводу. Сила тока в рамке $I_1 = 1$ А. Определить силы, действующие на каждую из сторон рамки, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии $c = 10$ см, а ток в ней сонаправлен току I. [$F_1 = 4,8$ мкН, $F_2 = F_4 = 1,66$ мкН, $F_3 = 1,2$ мкН]

3.134. По тонкому проволочному полукольцу радиусом $R = 50$ см течет ток $I = 1$ А. Перпендикулярно плоскости полукольца возбуждено однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,01$ Тл. Найти силу, растягивающую полукольцо. Действие на полукольцо магнитного поля подводящих проводов и взаимодействие отдельных элементов полукольца не учитывать. [0,01 Н]

3.135. Применяя закон Ампера для силы взаимодействия двух параллельных токов, вывести числовое значение магнитной постоянной μ_0 [$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м]

3.136. Электрон движется прямолинейно с постоянной скоростью $v = 0,2$ Мм/с. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого электроном в точке, находящейся на расстоянии $r = 2$ нм от электрона и лежащей на прямой, проходящей через мгновенное положение электрона и составляющей угол $\alpha = 45°$ со скоростью движения электрона. [566 мкТл]

3.137. Определить напряженность H поля, создаваемого прямолинейно равномерно движущимся со скоростью $v = 5000$ км/с электроном в точке, находящейся от него на расстоянии $r = 10$ нм и лежащей на перпендикуляре к $\mathbf{v}$, проходящем через мгновенное положение электрона. [637 А/м]

3.138. Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите радиусом $r = 52,8$ пм. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого электроном в центре круговой орбиты. [$1,25 \cdot 10^{-23}$ Тл]

3.139. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл по окружности. Определить угловую скорость вращения электрона. [$1,76 \cdot 10^{10}$ рад/с].

3.140. Электрон, обладая скоростью $v = 10$ Мм/с, влетел в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Индукция магнитного поля $B = 0,1$ мТл. Определить нормальное и тангенциальное ускорения электрона. [$a_n = \mathrm{const} = 1,76 \cdot 10^{14}$ м/с^2, $a_\tau = 0$]

3.141. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции движется прямой проводник длиной 40 см. Определить силу Лоренца, действующую на свободный электрон проводника, если возникающая на его концах разность потенциалов составляет 10 мкВ. [$4 \cdot 10^{-24}$ Н]

3.142. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 0,5$ кВ, движется параллельно прямолинейному длинному проводнику на расстоянии $r = 1$ см от него. Определить силу, действующую на электрон, если через проводник пропускать ток $I = 10$ А. [$4,24 \cdot 10^{-16}$ Н]

3.143. Протон, ускоренный разностью потенциалов $U = 0,5$ кВ, влетая в однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 2$ мТл, движется по окружности. Определить радиус этой окружности. [16, 1 см]

3.144. Электрон, влетев в однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 2$ мТл, движется по круговой орбите радиусом $R = 15$ см. Определить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока. [0,632 пА$\cdot$м^2]

3.145. Электрон, обладая скоростью $v = 1$ Мм/с, влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 60°$ к направлению поля и начинает двигаться по спирали. Напряженность магнитного поля $H = 1,5$ кА/м. Определить: 1) шаг спирали; 2) радиус витка спирали. [1) 9,49 мм; 2) 2,62 мм]

3.146. Электрон движется в однородном магнитном поле с магнитной индукцией $B = 0,2$ мТл по винтовой линии. Определить скорость v электрона, если радиус винтовой линии $R = 3$ см, а шаг $h = 9$ см [1,17 Мм/с]

3.147. Определить, при какой скорости пучок заряженных частиц, двигаясь перпендикулярно скрещенным под прямым углом однородным электрическому ($E = 100$ кВ/м) и магнитному ($B = 50$ мТл) полям, не отклоняется. [2 Мм/с]

3.148. В однородное магнитное поле с магнитной индукцией 0,2 Тл перпендикулярно линиям магнитной индукции с постоянной скоростью влетает заряженная частица. В течение 5 мкс включается электрическое поле напряженностью 0,5 кВ/м в направлении, параллельном магнитному полю. Определить шаг винтовой траектории заряженной частицы. [7,85 см]

3.149. Ионы двух изотопов с массами $m_1 = 6{,}5 \cdot 10^{-26}$ кг и $m_2 = 6{,}8 \cdot 10^{-26}$ кг, ускоренные разностью потенциалов $U = 0{,}5$ кВ, влетают в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл перпендикулярно линиям индукции. Принимая заряд каждого иона равным элементарному электрическому заряду, определить, насколько будут отличаться радиусы траекторий ионов изотопов в магнитном поле. [0,917 мм]

3.150. Циклотроны позволяют ускорять протоны до энергий 20 МэВ. Определить радиус дуантов циклотрона, если магнитная индукция $B = 2$ Тл. [$R > 32{,}3$ см]

3.151. Определить удельный заряд частиц, ускоренных в циклотроне в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1{,}7$ Тл при частоте ускоряющего напряжения $\nu = 25{,}9$ МГц. [$9{,}57 \cdot 10^8$ Кл/кг]

3.152. Протоны ускоряются в циклотроне в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1{,}2$ Тл. Максимальный радиус кривизны траектории протонов составляет $R = 40$ см Определить: 1) кинетическую энергию протонов в конце ускорения; 2) минимальную частоту ускоряющего напряжения, при которой протоны ускоряются до энергий $T = 20$ МэВ. [1) 11 МэВ; 2) 24,6 МГц]

3.153. В случае эффекта Холла для натриевого проводника при плотности тока $j = 150$ А/см^2 и магнитной индукции $B = 2$ Тл напряженность поперечного электрического поля $E_B = 0{,}75$ мВ/м. Определить концентрацию электронов проводимости, а также ее отношение к концентрации атомов в этом проводнике. Плотность натрия $\rho = 0{,}97$ г/см^3. [$n = 2{,}5 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$, $n/n' = 0{,}984$]

3.154. Определить постоянную Холла для натрия, если для него отношение концентрации электронов проводимости к концентрации атомов составляет 0,984. Плотность натрия $\rho = 0{,}97$ г/см^3. [$2{,}5 \cdot 10^{-10}$ м^3/(А·с)]

3.155. Определить, во сколько раз постоянная Холла у меди больше, чем у алюминия, если известно, что в алюминии на один атом в среднем приходится два свободных электрона, а в меди — 0,8 свободных электронов. Плотности меди и алюминия соответственно равны 8,93 и 2,7 г/см^3. [1,78]

3.156. Через сечение медной пластинки толщиной $d = 0{,}2$ мм пропускается ток $I = 6$ А. Пластинка помещается в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл, перпендикулярное ребру пластинки и направлению тока. Считая концентрацию электронов проводимости равной концентрации атомов, определить возникающую в пластинке поперечную (холловскую) разность потенциалов. Плотность меди $\rho = 8{,}93$ г/см^3. [2,21 мкВ]

3.157. Определить циркуляцию вектора магнитной индукции по окружности, через центр которой перпендикулярно ее плоскости проходит бесконечно длинный прямолинейный провод, по которому течет ток $I = 5$ А. [6,28 мкТл·м]

3.158. Определить циркуляцию вектора магнитной индукции для замкнутых контуров, изображенных на рис. 66, если сила тока в обоих проводниках $I = 2$ А. [1) 2,51 мкТл·м; 2) 5,02 мкТл·м; 3) 0]

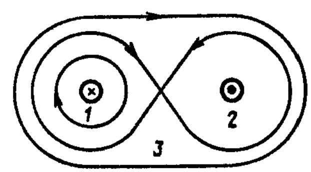


Рис. 66

3.159. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток $I = 10$ А. Определить, пользуясь теоремой о циркуляции вектора **B**, магнитную индукцию B в точке, расположенной на расстоянии $r = 10$ см от проводника. [20 мкТл]

3.160. Используя теорему о циркуляции вектора **B**, рассчитать магнитную индукцию поля внутри соленоида (в вакууме), если число витков соленоида равно N и длина соленоида равна l.

3.161. Соленоид длиной $l = 0{,}5$ м содержит $N = 1000$ витков. Определить магнитную индукцию B поля внутри соленоида, если сопротивление его обмотки $R = 120$ Ом, а напряжение на ее концах $U = 60$ В. [1,26 мТл]

3.162. В соленоиде длиной $l = 0{,}4$ м и диаметром $D = 5$ см создается магнитное поле, напряженность которого $H = 1{,}5$ кА/м. Определить: 1) магнитодвижущую силу F_m; 2) разность потенциалов U на концах обмотки, если для нее используется алюминиевая проволока

($\rho = 26$ нОм·м) диаметром $d = 1$ мм [1) 600 А; 2) 3,12 В]

3.163. Определить, пользуясь теоремой о циркуляции вектора **B**, индукцию и напряженность магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей 200 витков, протекает ток в 2 А. Внешний диаметр тороида равен 60 см, внутренний — 40 см. [В = 0,32 мТл, $H = 255$ А/м]

3.164. Определить магнитный поток через площадь поперечного сечения катушки (без сердечника), имеющей на каждом сантиметре длины $n = 8$ витков. Радиус соленоида $r = 2$ см, а сила тока в нем $I = 2$ А. [10,1 мкВб]

3.165. Внутри соленоида с числом витков $N = 200$ с никелевым сердечником ($\mu = 200$) напряженность однородного магнитного поля $H = 10$ кА/м. Площадь поперечного сечения сердечника $S = 10$ см^2. Определить: 1) магнитную индукцию поля внутри соленоида; 2) потокосцепление. [1) 2,51 Тл; 2) 0,502 Вб]

3.166. В однородное магнитное поле напряженностью $H = 100$ кА/м помещена квадратная рамка со стороной $a = 10$ см. Плоскость рамки составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha = 60°$. Определить магнитный поток, пронизывающий рамку. [628 мкВб]

3.167. Поток магнитной индукции через площадь поперечного сечения соленоида (без сердечника) равен $\Phi = 1$ мкВб. Длина соленоида $l = 12,5$ см. Определить магнитный момент p_m этого соленоида. [0,1 А·м^2]

3.168. В одной плоскости с бесконечным прямолинейным проводом с током $I = 20$ А расположена квадратная рамка со стороной, длина которой $a = 10$ см, причем две стороны рамки параллельны проводу, а расстояние d от провода до ближайшей стороны рамки равно 5 см. Определить магнитный поток Φ, пронизывающий рамку. [1,62 мкВб]

3.169. Прямой провод длиной $l = 20$ см с током $I = 5$ А, находящийся в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл, расположен перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определить работу сил поля, под действием которых проводник переместился на 2 см. [2 мДж]

3.170. Квадратный проводящий контур со стороной $l = 20$ см и током $I = 10$ А свободно подвешен в однородном магнитном поле с магнитной индукцией $B = 0,2$ Тл. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы повернуть контур на 180° вокруг оси, перпендикулярной направлению магнитного поля. [0,16 Дж]

3.171. В однородном магнитном поле с магнитной индукцией $B = 0,2$ Тл находится квадратный проводящий контур со стороной $l = 20$ см и током $I = 10$ А. Плоскость квадрата составляет с направлением поля угол в 30°. Определить работу удаления провода за пределы поля. [0,04 Дж]

3.172. Круговой проводящий контур радиусом $r = 5$ см и током $I = 1$ А находится в магнитном поле, причем плоскость контура перпендикулярна направлению поля. Напряженность поля равна 10 кА/м. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы повернуть контур на 90° вокруг оси, совпадающей с диаметром контура. [98,7 мкДж]

3.173. В однородном магнитном поле с магнитной индукцией $B = 1$ Тл находится плоская катушка из 100 витков радиусом $r = 10$ см, плоскость которой с направлением поля составляет угол $\beta = 60°$. По катушке течет ток $I = 10$ А. Определить: 1) вращающий момент, действующий на катушку; 2) работу для удаления этой катушки из магнитного поля. [15,7 Н·м; 2] 27,2 Дж]

3.174. Круглая рамка с током ($S = 15$ см^2) закреплена параллельно магнитному полю ($B = 0,1$ Тл), и на нее действует вращающий момент $M = 0,45$ мН·м. Рамку освободили, после поворота на 90° ее угловая скорость стала $\omega = 30$ с$^{-1}$. Определить: 1) силу тока, текущего по рамке; 2) момент инерции рамки относительно ее диаметра. [1) 3 А; 2) 10^{-6} кг·м^2]

3.5. Электромагнитная индукция

Основные законы и формулы

● Закон Фарадея

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где $\mathscr{E}_i$ — э. д. с. индукции.

● Э. д. с. индукции, возникающая в рамке площадью S при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B,

$$\mathscr{E}_i = BS\omega \sin \omega t,$$

где ωt — мгновенное значение угла между вектором **B** и вектором нормали **n** к плоскости рамки.

● Магнитный поток, создаваемый током I в контуре с индуктивностью L,

$$\Phi = LI.$$

● Э. д. с. самоиндукции

$$\mathscr{E}_s = -L\frac{dI}{dt},$$

где L — индуктивность контура.

● Индуктивность соленоида (тороида)

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2S}{l},$$

где N — число витков соленоида; l — его длина.

● Токи при размыкании и при замыкании цепи

$$I = I_0 e^{-t/\tau}; \quad I = I_0(1 - e^{-t/\tau}),$$

где $\tau = L/R$ — время релаксации (L — индуктивность; R — сопротивление).

● Э. д. с. взаимной индукции (э. д. с., индуцируемая изменением силы тока в соседнем контуре)

$$\mathscr{E} = -L_{12}\frac{dI}{dt},$$

где L_{12} — взаимная индуктивность контуров.

● Взаимная индуктивность двух катушек (с числом витков N_1 и N_2), намотанных на общий тороидальный сердечник,

$$L_{12} = L_{21} = \mu_0\mu\frac{N_1N_2}{l}S,$$

где μ — магнитная проницаемость сердечника; l — длина сердечника по средней линии; S — площадь сердечника.

● Коэффициент трансформации

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \frac{I_1}{I_2},$$

где N, $\mathscr{E}$, I — соответственно число витков, э. д. с. и сила тока в обмотках трансформатора.

● Энергия магнитного поля, создаваемого током в замкнутом контуре, по которому течет ток I,

$$W = LI^2/2.$$

● Объемная плотность энергии однородного магнитного поля длинного соленоида

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

Примеры решения задач

Задача 14. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл равномерно вращается катушка, содержащая $N = 600$ витков, с частотой $n = 6$ с$^{-1}$. Площадь S поперечного сечения катушки 100 см^2. Ось вращения перпендикулярна оси катушки и направлению магнитного поля. Определить максимальную э.д.с. индукции вращающейся катушки.

Дано: $B = 0{,}2$ Тл, $N = 600$, $n = 6$ с$^{-1}$, $S = 100$ см^2 $= 10^{-2}$ м^2.

Определить $(\mathscr{E}_i)_{max}$.

Решение. Согласно закону Фарадея,

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt},$$

где потокосцепление катушки $\Psi = N\Phi$ (N — число витков, пронизываемых магнитным потоком Φ). При произвольном расположении катушки относительно магнитного поля

$$\Psi = NBS\cos \omega t, \qquad (1)$$

где круговая частота $\omega = 2\pi n$. Подставив ω в (1), получим

$$\Psi = NBS\cos 2\pi nt.$$

Тогда

$$\mathscr{E}_i = -NBS \cdot 2\pi n(-\sin 2\pi nt) = 2\pi nNBS\sin 2\pi nt,$$

$\mathscr{E}_i = (\mathscr{E}_i)_{max}$ при $\sin 2\pi nt = 1$, поэтому

$$(\mathscr{E}_i)_{max} = 2\pi nNBS.$$

Вычисляя, получаем $(\mathscr{E}_i)_{max} = 45{,}2$ В.

Задача 15. Катушка без сердечника длиной $l = 50$ см содержит $N = 200$ витков. По катушке течет ток $I = 1$ А. Определить объемную плотность энергии магнитного поля внутри катушки.

Дано: $l = 50$ см $= 0{,}5$ м, $N = 200$, $I = 1$ А, $\mu = 1$.

Определить w.

Решение. Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = W/V, \qquad (1)$$

где $W = LI^2/2$ — энергия магнитного поля (L — индуктивность катушки); $V = lS$ — объем катушки (S — площадь катушки).

Индуктивность катушки $L = \mu_0\mu N^2S/l$. Подставив эти выражения в формулу (1), найдем искомую объемную плотность энергии магнитного поля внутри катушки:

$$w = \frac{\mu_0\mu N^2 I^2}{2l^2}.$$

Вычисляя, получаем $w = 0{,}1$ Дж/м^3.

Задача 16. Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки диаметром $d=0{,}4$ мм имеет длину $l=0{,}5$ м и поперечное сечение $S=60$ см^2. За какое время при напряжении $U=10$ В и силе тока $I=1{,}5$ А в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии поля внутри соленоида? Поле считать однородным.

Дано: $\mu=1$, $d=0{,}4$ мм $=4\cdot10^{-4}$ м, $l=0{,}5$ м, $S=60$ см$^2=$ $=6\cdot10^{-3}$ м^2, $I=1{,}5$ А, $U=10$ В, $Q=W$.

Определить t.

Решение. При прохождении тока I при напряжении U в обмотке за время t выделяется теплота

$$Q = IUt. \qquad (1)$$

Энергия поля внутри соленоида

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}V = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}lS, \qquad (2)$$

где $B=\mu_0\mu NI/l$ (N — общее число витков соленоида). Если витки вплотную прилегают друг к другу, то $l=Nd$, откуда $N=l/d$. Подставив выражения для B и N в (2), получаем

$$W = \frac{\mu_0\mu}{2}\frac{I^2 lS}{d^2}. \qquad (3)$$

Согласно условию задачи, $Q=W$. Приравняв выражения (1) и (3), найдем искомое время:

$$t = \frac{\mu_0\mu ISl}{2Ud^2}.$$

Вычисляя, получаем $t=1{,}77$ мс.

Задачи

3.175. Соленоид диаметром $d=4$ см, имеющий $N=500$ витков, помещен в магнитное поле, индукция которого изменяется со скоростью 1 мТл/с. Ось соленоида составляет с вектором магнитной индукции угол $\alpha=45°$. Определить э. д. с. индукции, возникающей в соленоиде. [444 мкВ]

3.176. В магнитное поле, изменяющееся по закону $B=$ $=B_0\cos\omega t$ ($B_0=0{,}1$ Тл, $\omega=4$ с$^{-1}$), помещена квадратная рамка со стороной $a=50$ см, причем нормаль к рамке образует с направлением поля угол $\alpha=45°$. Определить э. д. с. индукции, возникающую в рамке в момент времени $t=5$ с. [64 мВ]

3.177. Кольцо из алюминиевого провода ($\rho=26$ нОм·м) помещено в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Диаметр кольца $D=30$ см, диаметр провода $d=2$ мм. Определить скорость изменения магнитного поля, если ток в кольце $I=1$ А. [0,11 Тл/с]

3.178. Плоскость проволочного витка площадью $S=100$ см^2 и сопротивлением $R=5$ Ом, находящегося в однородном магнитном поле напряженностью $H=10$ кА/м, перпендикулярна линиям магнитной индукции. При повороте витка в магнитном поле отсчет гальванометра, замкнутого на виток, составляет $Q=12{,}6$ мКл. Определить угол поворота витка. [60°]

3.179. В однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}3$ Тл помещена прямоугольная рамка с подвижной стороной, длина которой $l=15$ см. Определить э. д. с. индукции, возникающей в рамке, если ее подвижная сторона перемещается перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью $v=10$ м/с. [0,45 В]

3.180. Две гладкие замкнутые металлические шины, расстояние между которыми равно 30 см, со скользящей перемычкой, которая может двигаться без трения, находятся в однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл, перпендикулярном плоскости контура (рис. 67). Перемычка массой $m=5$ г скользит вниз с постоянной скоростью $v=0{,}5$ м/с. Определить сопротивление перемычки, пренебрегая самоиндукцией контура и сопротивлением остальной части контура. [9,2 мОм]

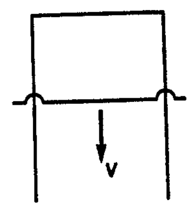


Рис. 67

3.181. В катушке длиной $l=0{,}5$ м, диаметром $d=5$ см и числом витков $N=1500$ ток равномерно увеличивается на 0,2 А за одну секунду. На катушку надето кольцо из медной проволоки ($\rho=17$ нОм·м) площадью сечения $S_к=3$ мм^2. Определить силу тока в кольце. [0,166 мА]

3.182. Катушка диаметром $d=2$ см, содержащая один слой плотно прилегающих друг к другу $N=500$ витков алюминиевого провода сечением $S=1$ мм^2, помещена в магнитное поле. Ось катушки параллельна линиям индукции. Магнитная индукция поля равномерно изменяется со скоростью 1 мТл/с. Определить тепловую мощность, выделяющуюся в катушке, если ее концы замкнуть накоротко. Удельное сопротивление алюминия $\rho=26$ нОм·м. [30,2 мкВт]

3.183. В однородном магнитном поле ($B=0{,}1$ Тл) вращается с постоянной угловой скоростью $\omega=50$ с$^{-1}$ вокруг вертикальной оси стержень длиной $l=0{,}4$ м. Определить э. д. с. индукции, возникающей в стержне, если ось вращения проходит через конец стержня параллельно линиям магнитной индукции. [0,4 В]

3.184. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}02$ Тл равномерно вращается вокруг вертикальной оси горизонтальный стержень длиной $l=0{,}5$ м. Ось вращения проходит через конец стержня параллельно линиям магнитной индукции. Определить число оборотов в секунду, при котором на концах стержня возникает разность потенциалов $U=0{,}1$ В. [6,37 с$^{-1}$]

3.185. В однородном магнитном поле ($B=0{,}2$ Тл) равномерно с частотой $n=600$ мин$^{-1}$ вращается рамка, содержащая $N=1200$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки $S=100$ см^2. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить максимальную э. д. с., индуцируемую в рамке. [151 В]

3.186. Магнитная индукция B поля между полюсами двухполюсного генератора равна 1 Тл. Ротор имеет 140 витков (площадь каждого витка $S=500$ см^2). Определить частоту вращения якоря, если максимальное значение э. д. с. индукции равно 220 В [5 с$^{-1}$]

3.187. В однородном магнитном поле ($B=0{,}2$ Тл) равномерно вращается прямоугольная рамка, содержащая $N=200$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки $S=100$ см^2. Определить частоту вращения рамки, если максимальная э. д. с., индуцируемая в ней, $(\mathscr{E}_i)_{\max}=12{,}6$ В. [5 с$^{-1}$]

3.188. В однородном магнитном поле равномерно вращается прямоугольная рамка с частотой $n=600$ мин$^{-1}$. Амплитуда индуцируемой в рамке э. д. с. $\mathscr{E}_0=3$ В. Определить максимальный магнитный поток через рамку. [47,7 мВб]

3.189. Катушка длиной $l=50$ см и диаметром $d=5$ см содержит $N=200$ витков. По катушке течет ток $I=1$ А. Определить: 1) индуктивность катушки; 2) магнитный поток, пронизывающий площадь ее поперечного сечения. [1) 197 мкГн; 2) 985 нВб]

3.190. Длинный соленоид индуктивностью $L=4$ мГн содержит $N=600$ витков. Площадь поперечного сечения соленоида $S=20$ см^2. Определить магнитную индукцию поля внутри соленоида, если сила тока, протекающего по его обмотке, равна 6 А. [0,02 Тл]

3.191. Две длинные катушки намотаны на общий сердечник, причем индуктивности этих катушек $L_1=0{,}64$ Гн и $L_2=0{,}04$ Гн. Определить, во сколько раз число витков первой катушки больше, чем второй. [В 4 раза]

3.192. Определить, сколько витков проволоки, вплотную прилегающих друг к другу, диаметром $d=0{,}5$ мм с изоляцией ничтожной толщины надо намотать на картонный цилиндр диаметром $D=1{,}5$ см, чтобы получить однослойную катушку индуктивностью $L=100$ мкГн? [225]

3.193. **Определить индуктивность соленоида длиной l и сопротивлением R, если обмоткой соленоида является проволока массой m (принять плотность проволоки и ее удельное сопротивление соответственно за ρ и ρ').** $\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{mR}{\rho\rho' l}\right]$

3.194. Сверхпроводящий соленоид длиной $l=10$ см и площадью поперечного сечения $S=3$ см^2, содержащий $N=1000$ витков, может быть подключен к источнику э. д. с. $\mathscr{E}=12$ В. Определить силу тока через 0,01 с после замыкания ключа. [31,8 А]

3.195. Через катушку, индуктивность L которой равна 200 мГн, протекает ток, изменяющийся по закону $I=2\cos 3t$. Определить: 1) закон изменения э. д. с. самоиндукции; 2) максимальное значение э. д. с. самоиндукции. [$\mathscr{E}_s=1{,}2\sin 3t$ В; 2) 1,2 В]

3.196. В соленоиде без сердечника, содержащем $N=1000$ витков, при увеличении силы тока магнитный поток увеличился на 1 мВб. Определить среднюю э. д. с. самоиндукции $\langle\mathscr{E}_s\rangle$, возникающую в соленоиде, если изменение силы тока произошло за 0,1 с. [1 В]

3.197. Имеется катушка индуктивностью $L=0{,}1$ Гн и сопротивлением $R=0{,}8$ Ом. Определить, во сколько раз уменьшится сила тока в катушке через $t=30$ мс, если источник тока отключить и катушку замкнуть накоротко. [В 1,27 раза]

3.198. Определить, через сколько времени сила тока замыкания достигнет 0,95 предельного значения, если источник тока замыкают на катушку сопротивлением $R = 12$ Ом и индуктивностью 0,5 Гн. [125 мс]

3.199. Катушку индуктивностью $L = 0{,}6$ Гн подключают к источнику тока. Определить сопротивление катушки, если за время $t = 3$ с сила тока через катушку достигает 80 % предельного значения. [322 мОм]

3.200. Бесконечно длинный соленоид длиной $l = 0{,}8$ м имеет однослойную обмотку из алюминиевого провода массой $m = 400$ г. Определить время релаксации τ для этого соленоида. Плотность и удельное сопротивление алюминия равны соответственно $\rho = 2{,}7$ г/см^3 и $\rho' = 26$ нОм·м. [712 мкс]

3.201. Соленоид диаметром $d = 3$ см имеет однослойную обмотку из плотно прилегающих друг к другу витков алюминиевого провода ($\rho' = 26$ нОм·м) диаметром $d_1 = 0{,}3$ мм. По соленоиду течет ток $I_0 = 0{,}5$ А. Определить количество электричества Q, протекающее по соленоиду, если его концы закоротить. [42,7 мкКл]

3.202. Катушка индуктивностью $L = 1{,}5$ Гн и сопротивлением $R_1 = 15$ Ом и резистор сопротивлением $R_2 = 150$ Ом соединены параллельно и подключены к источнику, электродвижущая сила которого $\mathscr{E} = 60$ В, через ключ K (рис. 68). Определить напряжение на зажимах катушки через $t_1 = 0{,}01$ с и $t_2 = 0{,}1$ с после размыкания цепи. [$U_1 = 200$ В, $U_2 = 0{,}01$ В]

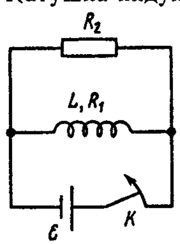


Рис. 68

3.203. Две катушки намотаны на один общий сердечник. Определить их взаимную индуктивность, если при скорости изменения силы тока в первой катушке $dI_1/dt = 3$ А/с во второй катушке индуцируется э.д.с. $\mathscr{E}_{i2} = 0{,}3$ В. [0,1 Гн]

3.204. Два соленоида ($L_1 = 0{,}64$ Гн, $L_2 = 1$ Гн) одинаковой длины и равного сечения вставлены один в другой. Определить взаимную индуктивность соленоидов. [0,8 Гн]

3.205. Две катушки намотаны на один сердечник. Индуктивность первой катушки $L_1 = 0{,}12$ Гн, второй — $L_2 = 3$ Гн. Сопротивление второй катушки $R_2 = 300$ Ом.

Определить силу тока I_2 во второй катушке, если за время $\Delta t = 0{,}01$ с силу тока в первой катушке уменьшить от $I_1 = 0{,}5$ А до нуля. [0,1 А]

3.206. Трансформатор с коэффициентом трансформации 0,15 понижает напряжение с 220 до 6 В. При этом сила тока во вторичной обмотке равна 6 А. Пренебрегая потерями энергии в первичной обмотке, определить сопротивление вторичной обмотки трансформатора [4,5 Ом]

3.207. Автотрансформатор, понижающий напряжение с $U_1 = 6$ кВ до $U_2 = 220$ В, содержит в первичной обмотке $N_1 = 2000$ витков. Сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 1$ Ом. Сопротивление внешней цепи (в сети пониженного напряжения) $R = 12$ Ом. Пренебрегая сопротивлением первичной обмотки, определить число витков во вторичной обмотке трансформатора. [79]

3.208. Трансформатор, понижающий напряжение с 220 до 12 В, содержит в первичной обмотке $N_1 = 2000$ витков. Сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 0{,}15$ Ом. Пренебрегая сопротивлением первичной обмотки, определить число витков во вторичной обмотке, если во внешнюю цепь (в сети пониженного напряжения) передают мощность $P = 20$ Вт. [111]

3.209. Сила тока I в обмотке соленоида, содержащего $N = 1500$ витков, равна 5 А. Магнитный поток Φ через поперечное сечение соленоида составляет 200 мкВб. Определить энергию магнитного поля в соленоиде. [0,75 Дж]

3.210. Обмотка электромагнита, находясь под постоянным напряжением, имеет сопротивление $R = 15$ Ом и индуктивность $L = 0{,}3$ Гн. Определить время, за которое в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии магнитного поля в сердечнике. [0,01 с]

3.211. Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки диаметром $d = 0{,}5$ мм имеет длину $l = 0{,}4$ м и поперечное сечение $S = 50$ см^2. Какой ток течет по обмотке при напряжении $U = 10$ В, если за время $t = 0{,}5$ мс в обмотке выделяется количество теплоты, равное энергии поля внутри соленоида? Поле считать однородным. [995 мА]

3.212. Индуктивность соленоида при длине 1 м и площади поперечного сечения 20 см^2 равна 0,4 мГн. Определить силу тока в соленоиде, при которой объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида равна 0,1 Дж/м^3. [1 А]

3.213. Объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида длиной 50 см и малого диаметра равна 0,7 Дж/м^3. Определить магнитодвижущую силу этого соленоида. [528 А]

3.214. Тороид с воздушным сердечником содержит 20 витков на 1 см. Определить объемную плотность энергии в тороиде, если по его обмотке протекает ток 3 А. [22,6 Дж/м^3]

3.6. Магнитные свойства вещества

Основные законы и формулы

● Связь орбитального магнитного $\mathbf{p}_m$ и орбитального механического $\mathbf{L}_l$ моментов электрона

$$\mathbf{p}_m = -g\mathbf{L}_e = -\frac{e}{2m}\mathbf{L}_e,$$

где $g = e/(2m)$ — гиромагнитное отношение орбитальных моментов.

● Намагниченность

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}_m/V = \sum \mathbf{p}_a/V,$$

где $\mathbf{P}_m = \sum \mathbf{p}_a$ — магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул.

● Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля

$$\mathbf{J} = \chi\mathbf{H},$$

где χ — магнитная восприимчивость вещества.

● Связь между векторами **B**, **H**, **J**

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J}),$$

где μ_0 — магнитная постоянная.

● Связь между магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью вещества

$$\mu = 1 + \chi.$$

● Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора **B**)

$$\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0(I + I'),$$

где d**l** — вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; B_l — составляющая вектора **B** в направлении касательной контура L произвольной формы; I и I' — соответственно алгебраические суммы макротоков (токов проводимости) и микротоков (молекулярных токов), охватываемых заданным контуром.

● Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = I,$$

где I — алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром L.

Примеры решения задач

Задача 17. Соленоид длиной $l = 20$ см, площадью поперечного сечения $S = 10$ см^2 и общим числом витков $N = 400$ находится в диамагнитной среде. Определить силу тока в обмотке соленоида, если его индуктивность $L = 1$ мГн и намагниченность J внутри соленоида равна 20 А/м.

Дано: $l = 20$ см $= 0{,}2$ м, $S = 10$ см$^2 = 10^{-3}$ м^2, $N = 400$, $L = 1$ мГн $= 10^{-3}$ Гн, $J = 20$ А/м.

Определить I.

Решение. Намагниченность внутри соленоида

$$J = \chi H,$$

где χ — магнитная восприимчивость вещества; H — напряженность магнитного поля.

Так как магнитная проницаемость вещества $\mu = 1 + \chi$, то

$$J = (\mu - 1)H. \qquad (1)$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = \oint_L H_l dl = \sum_k I_k,$$

т. е. равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуров. Для соленоида $Hl = NI$, откуда $H = NI/l$.

Индуктивность соленоида $L = \mu_0\mu N^2S/l$, тогда $\mu = \frac{Ll}{\mu_0 N^2 S}$. Подставив значения μ и H в формулу (1), получим

$$J = \left(\frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1\right)\frac{NI}{l},$$

откуда искомая сила тока

$$I = \frac{Jl}{N\left(\frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1\right)}.$$

Вычисляя и учитывая, что для диамагнетиков $\chi < 0$, получаем $I = 2{,}09$ А.

Задачи

3.215. Доказать, что отношение числового значения орбитального магнитного момента p_m электрона к числовому значению его орбитального механического момента L_e (гиромагнитное отношение орбитальных моментов) одинаково для любой орбиты, по которой движется электрон. [$g = e/(2m)$]

3.216. Принимая, что электрон в невозбужденном атоме водорода движется по круговой орбите радиусом $r = 52{,}8$ пм, определить: 1) магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока; 2) орбитальный механический момент L_e электрона; 3) исходя из полученных числовых значений, гиромагнитное отношение орбитальных моментов, доказав, что оно совпадает со значением, определяемым универсальными постоянными. [1) $9{,}25 \cdot 10^{-24}$ А·м^2; 2) $1{,}05 \cdot 10^{-34}$ кг·м^2/с; 3) 87,8 ГКл/кг]

3.217. В пространство между полюсами электромагнита подвешиваются поочередно висмутовый и алюминиевый стержни. Оказалось, что при включении электромагнита алюминиевый стержень располагается вдоль магнитного поля, а висмутовый — поперек магнитного поля. Объяснить различие в их поведении.

3.218. В однородное магнитное поле вносится длинный вольфрамовый стержень (магнитная проницаемость вольфрама $\mu = 1{,}0176$). Определить, какая доля суммарного магнитного поля в этом стержне определяется молекулярными токами. [1,73 %]

3.219. Напряженность однородного магнитного поля в платине равна 5 А/м. Определить магнитную индукцию поля, создаваемого молекулярными токами, если магнитная восприимчивость платины равна $3{,}6 \cdot 10^{-4}$. [2,26 нТл]

3.220. По круговому контуру радиусом $r = 40$ см, погруженному в жидкий кислород, течет ток $I = 1$ А. Определить намагниченность в центре этого контура. Магнитная восприимчивость жидкого кислорода $\chi = 3{,}4 \cdot 10^{-3}$. [4,25 мА/м]

3.221. По обмотке соленоида индуктивностью $L = 3$ мГн, находящегося в диамагнитной среде, течет ток $I = 0{,}4$ А. Соленоид имеет длину $l = 45$ см, площадь поперечного сечения $S = 10$ см^2 и число витков $N = 1000$. Определить внутри соленоида: 1) магнитную индукцию; 2) намагниченность. [1) 1,2 мТл; 2) 66 А/м]

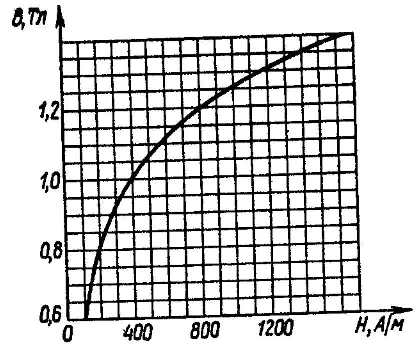


Рис. 69

3.222. Соленоид, находящийся в диамагнитной среде, имеет длину $l = 30$ см, площадь поперечного сечения $S = 15$ см^2 и число витков $N = 500$. Индуктивность соленоида $L = 1{,}5$ мГн, а сила тока, протекающего по нему, $I = 1$ А. Определить: 1) магнитную индукцию внутри соленоида; 2) намагниченность внутри соленоида. [1) 2 мТл; 2) 75 А/м]

3.223. Индукция магнитного поля в железном стержне $B = 1{,}2$ Тл. Определить для него намагниченность, если зависимость $B(H)$ для данного сорта ферромагнетика представлена на рис. 69. [954 кА/м]

3.224. Железный сердечник длиной $l = 0{,}5$ м малого сечения ($d \ll l$) содержит 400 витков. Определить магнитную проницаемость железа при силе тока $I = 1$ А. Использовать график на рис. 69. [$1{,}19 \cdot 10^3$]

3.225. По обмотке соленоида, в который вставлен железный сердечник (график зависимости индукции магнитного поля от напряженности представлен на рис. 69), течет ток $I = 4$ А. Соленоид имеет длину $l = 1$ м, площадь поперечного сечения $S = 20$ см^2 и число витков $N = 400$. Определить энергию магнитного поля соленоида. [2,24 Дж]

3.226. Обмотка тороида с железным сердечником имеет $N = 151$ виток. Средний радиус r тороида составляет 3 см. Сила тока I через обмотку равна 1 А. Определить для этих условий: 1) индукцию магнитного поля внутри тороида; 2) намагниченность сердечника; 3) магнитную проницаемость сердечника. Использовать график зависимости B от H, приведенный на рис. 69. [1) 1,2 Тл; 2) 954 кА/м; 3) $1{,}19 \cdot 10^3$]

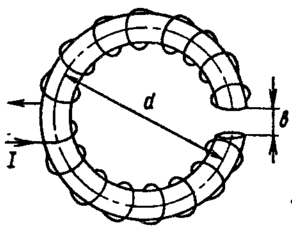


Рис. 70

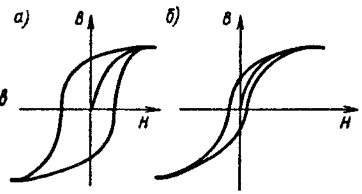


Рис. 71

3.227. На железном сердечнике в виде тора со средним диаметром $d = 70$ мм намотана обмотка с общим числом витков $N = 600$. В сердечнике сделана узкая поперечная прорезь шириной $b = 1{,}5$ мм (рис. 70). Магнитная проницаемость железа для данных условий $\mu = 500$. Определить при силе тока через обмотку $I = 4$ А: 1) напряженность H магнитного поля в железе; 2) напряженность H_0 магнитного поля в прорези. [1) 2,48 кА/м; 2) 1,24 МА/м]

3.228. На железном сердечнике в виде тора со средним диаметром $d = 70$ мм намотана обмотка с общим числом витков $N = 600$. В сердечнике сделана узкая поперечная прорезь шириной $b = 1{,}5$ мм (рис. 70). При силе тока через обмотку $I = 4$ А магнитная индукция в прорези $B_0 = 1{,}5$ Тл. Пренебрегая рассеянием поля на краях прорези, определить магнитную проницаемость железа для данных условий. [428]

3.229. На рис. 71, *а*, *б* качественно представлены гистерезисные петли для двух ферромагнетиков. Объяснить, какой из приведенных ферромагнетиков применяется для изготовления сердечников трансформаторов и какой — для изготовления постоянных магнитов.

3.7. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля

Основные законы и формулы

- Плотность тока смещения

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

где $\mathbf{D}$ — электрическое смещение; $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ — плотность тока смещения в вакууме; $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ — плотность тока поляризации.

- Полная система уравнений Максвелла:
  в интегральной форме

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{S}; \qquad \oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S} = \int_V \rho\,dV;$$

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) d\mathbf{S}; \qquad \oint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = 0,$$

  в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \qquad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$; $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$; $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ (ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные; ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости; γ — удельная проводимость вещества).

Задачи

3.230. Длинный цилиндрический конденсатор заряжается от источника э.д.с. Пренебрегая краевыми эффектами, доказать, что ток смещения в диэлектрике, заполняющем пространство между обкладками конденсатора, равен току в цепи источника э.д.с.

3.231. Запишите полную систему уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах и объясните физический смысл каждого из уравнений. Зачем вообще необходима дифференциальная форма уравнений?

3.232. Запишите полную систему уравнений Максвелла для стационарных полей ($\mathbf{E} = \text{const}$ и $\mathbf{B} = \text{const}$) в интегральной и дифференциальной формах и объясните физический смысл каждого из уравнений.

3.233. Запишите уравнения Максвелла через поток вектора электрического смещения Φ_D, поток вектора магнитной индукции Φ_B, заряд Q и силу тока I.

3.234. Доказать с помощью одного из уравнений Максвелла, что переменное во времени магнитное поле не может существовать без электрического поля.

3.235. Доказать, что уравнения Максвелла $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ и $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$ совместимы, т. е. первое из них не противоречит второму.

3.236. Ток, проходящий по обмотке длинного прямого соленоида радиусом R, изменяют так, что магнитное поле внутри соленоида растет со временем по закону $B = At^2$, где A — некоторая постоянная. Определить плотность тока смещения как функцию расстояния r от оси соленоида. Построить график зависимости $j_{\text{см}}(r)$.

3.237. В физике известно так называемое уравнение непрерывности $\oint\limits_S \mathbf{j}\,d\mathbf{S} = -\partial Q/\partial t$, выражающее закон сохранения заряда. Доказать, что уравнения Максвелла содержат это уравнение. Вывести дифференциальную форму уравнения непрерывности. [$\mathrm{div}\,\mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t$]

3.238. Определить силу тока смещения между квадратными пластинами конденсатора со стороной 5 см, если напряженность электрического поля изменяется со скоростью 4,52 МВ/(м·с). [0,1 мкА]

4 Колебания и волны

4.1. Механические и электромагнитные колебания

Основные законы и формулы

- Уравнение гармонических колебаний

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где s — смещение колеблющейся величины от положения равновесия; A — амплитуда колебаний; $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi\nu$ — круговая (циклическая) частота; $\nu = 1/T$ — частота; T — период колебаний; φ_0 — начальная фаза.

- Скорость и ускорение точки, совершающей гармонические колебания,

$$\frac{ds}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0\cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 s.$$

- Кинетическая энергия колеблющейся точки массой m

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi).$$

- Потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

- Полная энергия

$$E = mA^2\omega_0^2/2.$$

- Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки массой m

$$m\ddot{x} = -kx, \text{ или } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где k — коэффициент упругости ($k = \omega_0^2 m$).

● Период колебаний пружинного маятника

$$T=2\pi\sqrt{m/k},$$

где m — масса пружинного маятника; k — жесткость пружины.

● Период колебаний физического маятника

$$T=2\pi\sqrt{J/(mgl)}=2\pi\sqrt{L/g},$$

где J — момент инерции маятника относительно оси колебаний; l — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; $L=J/(ml)$ — приведенная длина физического маятника; g — ускорение свободного падения.

● Период колебаний математического маятника

$$T=2\pi\sqrt{l/g},$$

где l — длина маятника.

● Формула Томсона, устанавливающая связь между периодом T собственных колебаний в контуре без активного сопротивления и индуктивностью L и емкостью контура C,

$$T=2\pi\sqrt{LC}.$$

● Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре и его решение:

$$\ddot{Q}+\frac{1}{LC}Q=0;\ Q=Q_m\cos(\omega_0 t+\varphi),$$

где Q_m — амплитуда колебаний заряда; $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ — собственная частота контура.

● Амплитуда A результирующего колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты,

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1),$$

где A_1 и A_2 — амплитуды складываемых колебаний; φ_1 и φ_2 — их начальные фазы.

● Начальная фаза результирующего колебания

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}.$$

● Период биений

$$T=2\pi/\Delta\omega.$$

● Уравнение траектории движения точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты,

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{2xy}{AB}\cos\varphi+\frac{y^2}{B^2}=\sin^2\varphi,$$

где A и B — амплитуды складываемых колебаний; φ — разность фаз обоих колебаний.

● Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы и его решение:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2\delta\frac{ds}{dt}+\omega_0^2 s=0;\ s=A_0e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi),$$

где s — колеблющаяся величина, описывающая физический процесс; δ — коэффициент затухания ($\delta=r/(2m)$ в случае механических колебаний и $\delta=R/(2L)$ в случае электромагнитных колебаний); ω_0 — циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы; $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$ — частота затухающих колебаний; $A_0e^{-\delta t}$ — амплитуда затухающих колебаний.

● Декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)}=e^{\delta T},$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период.

● Логарифмический декремент затухания

$$\Theta=\ln\frac{A(t)}{A(t+T)}=\delta T=\frac{T}{\tau}=\frac{1}{N},$$

где $\tau=1/\delta$ — время релаксации; N — число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз.

● Добротность колебательной системы

$$Q=\frac{\pi}{\Theta}=\frac{\omega_0}{2\delta}.$$

● Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение для установившихся колебаний:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2\delta\frac{ds}{dt}+\omega_0^2 s=x_0\cos\omega t,\ s=A\cos(\omega t-\varphi),$$

где s — колеблющаяся величина, описывающая физический процесс ($x_0=F_0/m$ в случае механических колебаний, $x_0=U_m/L$ в случае электромагнитных колебаний);

$$A=\frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}};\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}.$$

● Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2},\ A_{рез}=\frac{x_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}.$$

● Полное сопротивление Z цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C, на концы которой подается переменное напряжение $U=U_m\cos\omega t$,

$$Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}=\sqrt{R^2+(R_L-R_C)^2},$$

где $R_L=\omega L$ — реактивное индуктивное сопротивление; $R_C=1/(\omega C)$ — реактивное емкостное сопротивление.

Сдвиг фаз между напряжением и силой тока

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

- Действующие (эффективные) значения тока и напряжения

$$I = I_m/\sqrt{2},\ U = U_m/\sqrt{2},$$

где I_m и U_m — амплитудные значения силы тока и напряжения.

- Средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока,

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi,$$

где

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Материальная точка массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0{,}2$ Гц. Амплитуда колебаний равна 5 см. Определить: 1) максимальную силу, действующую на точку; 2) полную энергию колеблющейся точки.

Дано: $m = 10$ г $= 10^{-2}$ кг, $\nu = 0{,}2$ Гц, $A = 5$ см $= 5 \times 10^{-2}$ м.

Определить: 1) F_{max}; 2) E.

Решение. Уравнение гармонического колебания

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Тогда скорость и ускорение колеблющейся точки

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi);$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Согласно второму закону Ньютона, сила, действующая на точку,

$$F = ma = -A\omega_0^2 m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

$F = F_{max}$ при $\cos(\omega_0 t + \varphi) = \pm 1$, поэтому искомое максимальное значение силы

$$F_{max} = A\omega_0^2 m = 4\pi^2\nu^2 A m$$

(учли, что $\omega_0 = 2\pi\nu$).

Полная энергия колеблющейся точки

$$E = T_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Подставив сюда ω_0, найдем искомую полную энергию:

$$E = 2\pi^2 m \nu^2 A^2.$$

Вычисляя, получаем: 1) $F_{max} = 0{,}8$ мН; 2) $E = 19{,}7$ мкДж.

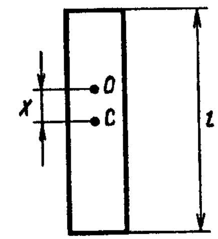


Рис. 72

Задача 2. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень. Определить длину стержня, если частота колебаний маятника максимальна, когда точка подвеса O находится от центра масс C на расстоянии 20,2 см (рис. 72).

Дано: $x = 20{,}2$ см $= 0{,}202$ м, $\omega = \omega_{max}$.

Определить l.

Решение. Циклическая частота колебаний физического маятника

$$\omega = \sqrt{mgx/J}, \tag{1}$$

где m — масса маятника; J — момент его инерции.

Согласно теореме Штейнера, момент инерции стержня относительно точки подвеса, отстоящей от центра масс на расстоянии x,

$$J = \frac{ml^2}{12} + mx^2. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), получим

$$\omega = \sqrt{\frac{12gx}{l^2 + 12x^2}}. \tag{3}$$

Найдем экстремум функции (3):

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{6g(l^2 - 12x^2)}{x^{1/2}(l^2 + 12x^2)^{3/2}} = 0,$$

откуда

$$l^2 - 12x^2 = 0,$$

т. е искомая длина маятника

$$l = 2\sqrt{3}x.$$

Вычисляя, получим $l = 70$ см.

Задача 3. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = \cos \pi t$ и $y = \cos \frac{\pi}{2} t$. Определить уравнение траектории точки.

Дано: $x = \cos \pi t$, $y = \cos \frac{\pi}{2} t$.

Определить $y(x)$.

Решение. По условию задачи,

$$x = \cos \pi t; \tag{1}$$

$$y = \cos \frac{\pi}{2} t. \tag{2}$$

Для определения уравнения траектории точки из уравнений (1) и (2) исключим время, тогда

$$\cos \pi t = \cos^2 \frac{\pi}{2} t - \sin^2 \frac{\pi}{2} t = \cos^2 \frac{\pi}{2} t - \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} t\right) = 2\cos^2 \frac{\pi}{2} t - 1 = 2y^2 - 1,$$

откуда искомое уравнение траектории точки

$$y = \sqrt{(x+1)/2}$$

представляет собой параболу.

Задача 4. Логарифмический декремент затухания тела, колеблющегося с частотой 50 Гц, равен 0,01. Определить: 1) время, за которое амплитуда колебаний тела уменьшится в 20 раз; 2) число полных колебаний тела, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.

Дано: $\nu = 50$ Гц; $\Theta = 0{,}01$, $A = 0{,}05\, A_0$.

Определить: 1) t; 2) N.

Решение. Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\delta t}, \tag{1}$$

где A_0 — амплитуда колебаний в момент $t = 0$; δ — коэффициент затухания.

Логарифмический декремент затухания $\Theta = \delta T$ ($T = 1/\nu$ — условный период затухающих колебаний). Тогда $\delta = \Theta \nu$ и выражение (1) можно записать в виде

$$A = A_0 e^{-\Theta \nu t},$$

откуда искомое время

$$t = \frac{1}{\Theta \nu} \ln (A_0/A).$$

Число искомых полных колебаний

$$N = t/T = t\nu.$$

Вычисляя, получаем: 1) $t = 6$ с; 2) $N = 300$.

Задача 5. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 25$ мГн, конденсатора емкостью $C = 10$ мкФ и резистора. Определить сопротивление резистора, если известно, что амплитуда тока в контуре уменьшилась в e раз за 16 полных колебаний.

Дано: $L = 25$ мГн $= 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ Гн, $C = 10$ мкФ $= 10^{-5}$ Ф, $N_e = 16$.

Определить R.

Решение. Число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды силы тока в e раз,

$$N_e = \tau / T, \tag{1}$$

где $\tau = 1/\delta$ — время релаксации; $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — условный период затухания колебаний ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — собственная частота контура; $\delta = R/(2L)$ — коэффициент затухания).

Подставив эти выражения в (1), получим

$$N_e = \frac{\frac{2L}{R}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4L}{R^2 C} - 1},$$

откуда искомое сопротивление

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C(1 + 4\pi^2 N^2)}}.$$

Вычисляя, получим $R = 0{,}995$ Ом.

Задача 6. Груз массой $m = 50$ г, подвешенный на нити длиной $l = 20$ см, совершает колебания в жидкости. Коэффициент сопротивления $r = 0{,}02$ кг/с. На груз действует вынуждающая сила $F = 0{,}1 \cos \omega t$, Н. Определить: 1) частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; 2) резонансную амплитуду.

Дано: $m = 50$ г $= 5 \cdot 10^{-2}$ кг, $l = 20$ см $= 0{,}2$ м, $r = 0{,}02$ кг/с, $F = 0{,}1 \cos \omega t$, Н.

Определить: 1) $\omega_{рез}$; 2) $A_{рез}$.

Решение. Очевидно, что частота вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна, является резонансной частотой:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \tag{1}$$

где ω_0 — собственная частота колебаний системы; $\delta = r/(2m)$ — коэффициент затухания.

Груз, подвешенный на нити, можно принять за математический маятник, тогда $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Подставив значения ω_0 и δ в формулу (1), найдем искомую резонансную частоту:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{r^2}{2m^2}}.$$

Подставив в выражение для амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}},$$

где F_0 — амплитудное значение вынуждающей силы (по условию задачи, $F_0 = 0{,}1$ Н), формулу (1), найдем искомую резонансную амплитуду:

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{r\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{r^2}{4m^2}}}.$$

Вычисляя, получим: 1) $\omega_{рез} = 7$ рад/с; 2) $A_{рез} = 71{,}4$ см.

Задача 7. В колебательном контуре, содержащем конденсатор емкостью $C = 5$ нФ и катушку индуктивностью $L = 10$ мкГн и активным сопротивлением $R = 0{,}2$ Ом, поддерживаются незатухающие гармонические колебания. Определить амплитудное значение напряжения U_{mC} на конденсаторе, если средняя мощность, потребляемая колебательным контуром, составляет 5 мВт.

Дано: $C = 5$ нФ $= 5 \cdot 10^{-9}$ Ф, $L = 10$ мкГн $= 10^{-5}$ Гн, $R = 0{,}2$ Ом, $\langle P \rangle = 5$ мВт $= 5 \cdot 10^{-3}$ Вт.

Определить U_{mC}.

Решение. Средняя мощность, потребляемая контуром,

$$\langle P \rangle = RI_m^2/2, \qquad (1)$$

где $I_m = U_{mC}\,\omega C$ — амплитуда силы тока.

Так как в контуре поддерживаются незатухающие колебания, то $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Подставив эти выражения в формулу (1), получим

$$\langle P \rangle = RU_{mC}\,\omega^2C^2/2 = RU_{mC}C/(2L),$$

откуда найдем искомое амплитудное значение напряжения на конденсаторе:

$$U_{mC} = \sqrt{\frac{2L\langle P \rangle}{RC}}.$$

Вычисляя, получим $U_{mC} = 10$ В.

Задачи

4.1. Гармонические колебания величины s описываются уравнением $s = 0{,}02\cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. Определить: 1) амплитуду колебаний; 2) циклическую частоту; 3) частоту колебаний; 4) период колебаний.

4.2. Записать уравнение гармонического колебательного движения точки, совершающей колебания с амплитудой $A = 8$ см, если за $t = 1$ мин совершается $n = 120$ колебаний и начальная фаза колебаний равна 45°. $\left[8\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\ \text{см}\right]$

4.3. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 4$ см и периодом $T = 2$ с. Написать уравнение движения точки, если ее движение начинается из положения $x_0 = 2$ см. $\left[x = 0{,}04\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\text{м}\right]$

4.4. Точка совершает гармонические колебания с периодом $T = 6$ с и начальной фазой, равной нулю. Определить, за какое время, считая от начала движения, точка сместится от положения равновесия на половину амплитуды. [1 с]

4.5. Написать уравнение гармонического колебания точки, если его амплитуда $A = 15$ см, максимальная скорость колеблющейся точки $v_{max} = 30$ см/с, начальная фаза $\varphi = 10°$. $\left[x = 0{,}15\cos\left(2t + \frac{\pi}{18}\right)\ \text{м}\right]$

4.6. Точка совершает гармонические колебания по закону $x = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{8}\right)$ м. Определить: 1) период T колебаний; 2) максимальную скорость v_{max} точки; 3) максимальное ускорение a_{max} точки. [1) $T = 4$ с; 2) $v_{max} = 4{,}71$ м/с, 3) $a_{max} = 7{,}4$ м/с^2]

4.7. Точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 10$ см и периодом $T = 5$ с. Определить для точки: 1) максимальную скорость; 2) максимальное ускорение. [1) 12,6 см/с; 2) 15,8 см/с^2]

4.8. Скорость материальной точки, совершающей гармонические колебания, задается уравнением $v(t) = -6\sin 2\pi t$. Записать зависимость смещения этой точки от времени. $\left[x(t) = \frac{3}{\pi}\cos 2\pi t\right]$

6-130

4.9. Материальная точка совершает колебания согласно уравнению $x = A\sin\omega t$. В какой-то момент времени смещение точки $x_1 = 15$ см. При возрастании фазы колебаний в два раза смещение x_2 оказалось равным 24 см. Определить амплитуду A колебаний. [25 см]

4.10. Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}02\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, м. Определить: 1) амплитуду колебаний; 2) период колебаний; 3) начальную фазу колебаний; 4) максимальную скорость точки; 5) максимальное ускорение точки; 6) через сколько времени после начала отсчета точка будет проходить через положение равновесия. [1) 2 см, 2) 2 с; 3) $\pi/2$; 4) 6,28 см/с; 5) 19,7 см/с^2; 6) $t = m$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$]

4.11. Материальная точка, совершающая гармонические колебания с частотой $\nu = 1$ Гц, в момент времени $t = 0$ проходит положение, определяемое координатой $x_0 = 5$ см, со скоростью $v_0 = 15$ см/с. Определить амплитуду колебаний. [5,54 см]

4.12. Определить максимальные значения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A = 3$ см и периодом $T = 4$ с. [$v_{max} = 4{,}71$ см/с^2; $a_{max} = 7{,}4$ см/с^2]

4.13. Тело массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания по закону $x = 0{,}1\cos(4\pi t + \pi/4)$ м. Определить максимальные значения: 1) возвращающей силы; 2) кинетической энергии. [1) 0,158 Н; 2) 7,89 мДж]

4.14. Материальная точка массой $m = 50$ г совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}1 \times \cos\frac{3\pi}{2}t$ м. Определить: 1) возвращающую силу F для момента времени $t = 0{,}5$ с; 2) полную энергию E точки. [1) 78,5 мН; 2) 5,55 мДж]

4.15. Материальная точка массой $m = 20$ г совершает гармонические колебания по закону $x = 0{,}1\cos(4\pi t + \pi/4)$ м. Определить полную энергию E этой точки. [15,8 мДж]

4.16. Полная энергия E гармонически колеблющейся точки равна 10 мкДж, а максимальная сила F_{max}, действующая на точку, равна $-0{,}5$ мН. Написать уравнение движения этой точки, если период T колебаний равен 4 с, а начальная фаза $\varphi = \pi/6$

$$\left[x = 0{,}04\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right), \text{ м}\right]$$

4.17. Определить отношение кинетической энергии T точки, совершающей гармонические колебания, к ее потенциальной энергии П, если известна фаза колебания. [$\mathrm{tg}^2(\omega_0 t + \varphi)$]

4.18. Определить полную энергию материальной точки массой m, колеблющейся по закону $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

$$\left[E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\right]$$

4.19. Груз, подвешенный к спиральной пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 8$ см. Определить жесткость k пружины, если известно, что максимальная кинетическая энергия T_{max} груза составляет 0,8 Дж. [250 Н/м]

4.20. Материальная точка колеблется согласно уравнению $x = A\cos\omega t$, где $A = 5$ см и $\omega = \pi/12$ с$^{-1}$. Когда возвращающая сила F в первый раз достигает значения -12 мН, потенциальная энергия П точки оказывается равной 0,15 мДж. Определить: 1) этот момент времени t; 2) соответствующую этому моменту фазу ωt. [1) 4 с; 2) $\pi/3$]

4.21. Груз, подвешенный к спиральной пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 6$ см. Определить полную энергию E колебаний груза, если жесткость k пружины составляет 500 Н/м. [0,9 Дж]

4.22. Спиральная пружина обладает жесткостью $k = 25$ Н/м. Определить, тело какой массой m должно быть подвешено к пружине, чтобы за $t = 1$ мин совершалось 25 колебаний. [3,65 кг]

4.23. Если увеличить массу груза, подвешенного к спиральной пружине, на 600 г, то период колебаний груза возрастает в 2 раза. Определить массу первоначально подвешенного груза. [0,2 кг]

4.24. При подвешивании грузов массами $m_1 = 600$ г и $m_2 = 400$ г к свободным пружинам последние удлинились одинаково ($l = 10$ см). Пренебрегая массой пружин, определить: 1) периоды колебаний грузов; 2) какой из грузов при одинаковых амплитудах обладает большей энергией и во сколько раз. [1) $T_1 = T_2 = 0{,}63$ с; 2) груз большей массы, в 1,5 раза]

4.25. На горизонтальной пружине жесткостью $k = 800$ Н/м укреплен шар массой $M = 4$ кг, лежащий на гладком столе, по которому он может скользить без трения (рис. 73). Пуля массой $m = 10$ г, летящая с горизонтальной скоростью $v_0 = 600$ м/с и имеющая в момент удара скорость направленную вдоль оси пружины, попала в шар и застряла в нем. Пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определить: 1) амплитуду колебаний шара; 2) период колебаний шара. [1) 10 см; 2) 0,419 с]

4.26. На чашку весов массой M (рис. 74), подвешенную на пружине с жесткостью k, с высоты h падает небольшой груз массой m. Удар груза о дно чашки является абсолютно неупругим. Чашка в результате падения груза начинает совершать колебания. Определить амплитуду A этих колебаний. $\left[A=\sqrt{\dfrac{m^2g^2}{k^2}+\dfrac{2m^2gh}{(m+M)k}}\right]$

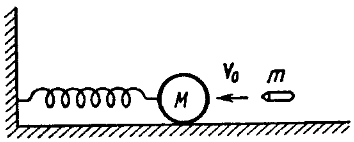


Рис. 73

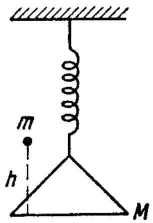


Рис. 74

4.27. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной 35 см. Определить, на каком расстоянии от центра масс должна быть точка подвеса, чтобы частота колебаний была максимальной. [10,1 см]

4.28. Однородный диск радиусом $R = 20$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей на расстоянии $l = 15$ см от центра диска. Определить период T колебаний диска относительно этой оси. [1,07 с]

4.29. Тонкий обруч радиусом $R = 50$ см подвешен на вбитый в стену гвоздь и колеблется в плоскости, параллельной стене. Определить период T колебаний обруча. [2 с]

4.30. Тонкий однородный стержень длиной $l = 60$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Стержень отклонили на угол $\alpha_0 = 0{,}01$ рад и в момент времени $t_0 = 0$ отпустили. Считая колебания малыми, определить период колебаний стержня и записать функцию $\alpha(t)$. [1,27 с, $\alpha(t) = 0{,}01\cos 1{,}57\pi t$ рад]

4.31. Тонкий однородный стержень длиной $l = 60$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, отстоящей на расстоянии $x = 15$ см от его середины. Определить период колебаний стержня, если он совершает малые колебания. [1,19 с]

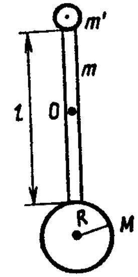


Рис. 75

4.32. Маятник состоит из стержня ($l = 30$ см, $m = 50$ г), на верхнем конце которого укреплен маленький шарик (материальная точка массой $m' = 40$ г), на нижнем — шарик ($R = 5$ см, $M = 100$ г). Определить период колебания этого маятника около горизонтальной оси, проходящей через точку O в центре стержня (рис. 75). [1,24 с]

4.33. Математический маятник, состоящий из нити длиной $l = 1$ м и свинцового шарика радиусом $r = 2$ см, совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 6$ см. Определить: 1) скорость шарика при прохождении им положения равновесия; 2) максимальное значение возвращающей силы. Плотность свинца $\rho = 11{,}3$ г/см^3. [1) 0,186 м/с; 2) 69,5 мН]

4.34. Два математических маятника имеют одинаковые массы, длины, отличающиеся в $n = 1{,}5$ раза, и колеблются с одинаковыми угловыми амплитудами. Определить, какой из маятников обладает большей энергией и во сколько раз. [Маятник большей длины, в 1,5 раза]

4.35. Два математических маятника, длины которых отличаются на $\Delta l = 16$ см, совершают за одно и то же время один $n_1 = 10$ колебаний, другой — $n_2 = 6$ колебаний. Определить длины маятников l_1 и l_2. [$l_1 = 9$ см, $l_2 = 25$ см]

4.36. Математический маятник длиной $l = 50$ см подвешен в кабине самолета. Определить период T колебаний маятника, если самолет движется: 1) равномерно; 2) горизонтально с ускорением $a = 2{,}5$ м/с^2. [1) 1,42 с; 2) 1,4 с]

4.37. Математический маятник длиной $l = 1$ м подвешен к потолку кабины, которая начинает опускаться вертикально вниз с ускорением $a_1 = g/4$. Спустя время $t_1 = 3$ с после начала движения кабина начинает двигаться равномерно, а затем в течение 3 с тормозится до остановки. Определить: 1) периоды T_1, T_2, T_3 гармонических колебаний маятника на каждом из участков пути; 2) период T_4 гармонических колебаний маятника при движении точки подвеса в горизонтальном направлении с ускорением $a_4 = g/4$. [$T_1 = 2{,}32$ с, $T_2 = 2{,}01$ с, $T_3 = 1{,}79$ с, $T_4 = 0{,}621$ с]

4.38. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 1$ мГн и конденсатора емкостью $C = 2$ нФ. Пренебрегая сопротивлением контура, определить, на какую волну этот контур настроен. [$2{,}67 \cdot 10^3$ м]

4.39. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}2$ мГн и конденсатора площадью пластин $S = 155$ см^2, расстояние между которыми $d = 1{,}5$ мм. Зная, что контур резонирует на длину волны $\lambda = 630$ м, определить диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами конденсатора. [6,11]

4.40. Колебательный контур содержит соленоид (длина $l = 5$ см, площадь поперечного сечения $S_1 = 1{,}5$ см^2, число витков $N = 500$) и плоский конденсатор (расстояние между пластинами $d = 1{,}5$ мм, площадь пластин $S_2 = 100$ см^2). Определить частоту ω собственных колебаний контура. [$4{,}24 \cdot 10^6$ рад/с]

4.41. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн и конденсатора емкостью $C = 39{,}5$ мкФ. Заряд конденсатора $Q_m = 3$ мкКл. Пренебрегая сопротивлением контура, записать уравнение: 1) изменения силы тока в цепи в зависимости от времени; 2) изменения напряжения на конденсаторе в зависимости от времени. [1) $I = 1{,}5 \cos(160\pi t + \pi/2)$, мА, $U_C = 76 \cos 160\pi t$, мВ]

4.42. Сила тока в колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн и конденсатор, со временем изменяется согласно уравнению $I = -0{,}1 \times \sin 200\pi t$ А. Определить: 1) период колебаний; 2) емкость конденсатора; 3) максимальное напряжение на обкладках конденсатора; 4) максимальную энергию магнитного поля; 5) максимальную энергию электрического поля. [1) 10 мс; 2) 25,3 мкФ; 3) 6,29 В; 4) 0,5 мДж; 5) 0,5 мДж]

4.43. Энергия свободных незатухающих колебаний, происходящих в колебательном контуре, составляет 0,2 мДж. При медленном раздвигании пластин конденсатора частота колебаний увеличилась в $n = 2$ раза. Определить работу, совершенную против сил электрического поля. [0,6 мДж]

4.44. Конденсатор емкостью C зарядили до напряжения U_m и замкнули на катушку индуктивностью L. Пренебрегая сопротивлением контура, определить амплитудное значение силы тока в данном колебательном контуре. [$I_m = U_m\sqrt{C/L}$]

4.45. Колебательный контур содержит катушку с общим числом витков $N = 100$ индуктивностью $L = 10$ мкГн и конденсатор емкостью $C = 1$ нФ. Максимальное напряжение U_m на обкладках конденсатора составляет 100 В. Определить максимальный магнитный поток, пронизывающий катушку. [0,1 мкВб]

4.46. Два одинаково направленных гармонических колебания одинакового периода с амплитудами $A_1 = 4$ см и $A_2 = 8$ см имеют разность фаз $\varphi = 45°$. Определить амплитуду результирующего колебания. [11,2 см]

4.47. Амплитуда результирующего колебания, получающегося при сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты, обладающих разностью фаз $\varphi = 60°$, равна $A = 6$ см. Определить амплитуду A_2 второго колебания, если $A_1 = 5$ см. [1,65 см]

4.48. Определить разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковых частоты и амплитуды, если амплитуда их результирующего колебания равна амплитудам складываемых колебаний. [120°]

4.49. Разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода $T = 4$ с и одинаковой амплитуды $A = 5$ см составляет $\pi/4$. Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения этих колебаний, если начальная фаза одного из них равна нулю. $\left[x = 9{,}24 \cos\left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{8}\right), \text{ см}\right]$

4.50. Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемых уравнениями $x_1 = 3 \times \cos 2\pi t$ см и $x_2 = 3\cos(2\pi t + \pi/4)$ см. Определить для результирующего колебания: 1) амплитуду; 2) начальную фазу. Записать уравнение результирующего колебания и представить векторную диаграмму сложения амплитуд. $\left[1)\ 5{,}54 \text{ см};\ 2)\ \pi/8;\ x = 5{,}54 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{8}\right), \text{ см}\right]$

4.51. Точка одновременно участвует в n одинаково направленных гармонических колебаниях одинаковой частоты: $A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$, $A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$, ..., $A_n\cos(\omega t + \varphi_n)$. Используя метод вращающегося вектора амплитуды, определить для результирующего колебания: 1) амплитуду; 2) начальную фазу.

4.52. Частоты колебаний двух одновременно звучащих камертонов настроены соответственно на 560 и 560,5 Гц. Определить период биений. [2 с]

4.53. В результате сложения двух колебаний, период одного из которых $T_1 = 0{,}02$ с, получают биения с периодом $T_б = 0{,}2$ с. Определить период T_2 второго складываемого колебания. [22,2 мс]

4.54. Складываются два гармонических колебания одного направления, имеющие одинаковые амплитуды и одинаковые начальные фазы, с периодами $T_1 = 2$ с и $T_2 = 2{,}05$ с. Определить: 1) период результирующего колебания; 2) период биения. [1) 2,02 с; 2) 82 с]

4.55. Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления, описывается уравнением вида $x = A\cos t \cos 45t$ (t — в секундах). Определить: 1) циклические частоты складываемых колебаний; 2) период биений результирующего колебания. [1) $\omega_1 = 46$ $с^{-1}$, $\omega_2 = 45$ $с^{-1}$; 2) $T = 6{,}28$ с]

4.56. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = 3\cos \omega t$, см и $y = 4\cos \omega t$, см. Определить уравнение траектории точки и вычертить ее с нанесением масштаба. [$y = 4x/3$]

4.57. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = 3\cos 2\omega t$, см и $y = 4\cos(2\omega t + \pi)$, см. Определить уравнение траектории точки и вычертить ее с нанесением масштаба. [$y = -4x/3$]

4.58. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A\sin \omega t$ и $y = B\cos \omega t$, где A, B и ω — положительные постоянные. Определить уравнение траектории точки, вычертить ее с нанесением масштаба, указав направление ее движения по этой траектории. [$x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$, по часовой стрелке]

4.59. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A\sin(\omega t + \pi/2)$ и $y = A\sin \omega t$. Определить уравнение траектории точки и вычертить ее с нанесением масштаба, указав направление ее движения по этой траектории. [$x^2 + y^2 = A^2$, против часовой стрелки]

4.60. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = \cos 2\pi t$ и $y = \cos \pi t$. Определить уравнение траектории точки и вычертить ее с нанесением масштаба. [$2y^2 - x = 1$]

4.61. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A\sin \omega t$ и $y = A\sin 2\omega t$. Определить уравнение траектории точки и вычертить ее с нанесением масштаба. [$y^2 = 4x^2(1 - x^2/A^2)$]

4.62. Период затухающих колебаний $T = 1$ с, логарифмический декремент затухания $\Theta = 0{,}3$, начальная фаза равна нулю. Смещение точки при $t = 2T$ составляет 5 см. Записать уравнение движения этого колебания. [$x = 9{,}1e^{-0{,}3t}\cos 2\pi t$ см]

4.63. Доказать, что для затухающих колебаний, описываемых уравнением $x(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos \omega t$, выполняется условие $x(t + T) = x(t)e^{-\delta T}$.

4.64. Амплитуда затухающих колебаний маятника за $t = 2$ мин уменьшилась в 2 раза. Определить коэффициент затухания δ. [$5{,}78 \cdot 10^{-3}$ $с^{-1}$]

4.65. Логарифмический декремент колебаний Θ маятника равен 0,01. Определить число N полных колебаний маятника до уменьшения его амплитуды в 3 раза. [110]

4.66. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за 1 мин уменьшилась в 3 раза. Определить, во сколько раз она уменьшится за 4 мин. [В 81 раз]

4.67. Начальная амплитуда затухающих колебаний маятника $A_0 = 3$ см. По истечении $t_1 = 10$ с $A_1 = 1$ см. Определить, через сколько времени амплитуда колебаний станет равной $A_2 = 0{,}3$ см. [21 с]

4.68. Тело массой $m = 0{,}6$ кг, подвешенное к спиральной пружине жесткостью $k = 30$ Н/м, совершает в некоторой среде упругие колебания. Логарифмический декремент колебаний $\Theta = 0{,}01$. Определить: 1) время t, за которое амплитуда колебаний уменьшится в 3 раза; 2) число N полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды. [1) 97,6 с; 2) 110]

4.69. Доказать, что выражения для коэффициента затухания $\delta = r/2m$ и циклической частоты $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} > 0$ следуют из решения дифференциального уравнения для затухающих колебаний $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ (m — масса тела; r — коэффициент сопротивления; k — коэффициент упругости).

4.70. При наблюдении затухающих колебаний выяснилось, что для двух последовательных колебаний амплитуда второго меньше амплитуды первого на 60 %. Период затухающих колебаний $T = 0{,}5$ с. Определить: 1) коэффициент затухания δ; 2) для тех же условий частоту ν_0 незатухающих колебаний. [1) $\delta = 1{,}83\ \text{с}^{-1}$; 2) 2,02 Гц]

4.71. Тело массой $m = 100$ г, совершая затухающие колебания, за $\tau = 1$ мин потеряло 40 % своей энергии. Определить коэффициент сопротивления r. [$8{,}51 \cdot 10^{-4}$ кг/с]

4.72. Дифференциальное уравнение для силы тока в электрическом колебательном контуре задается в виде $L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$. Определить: 1) собственную частоту контура; 2) циклическую частоту ω; 3) коэффициент затухания δ.

4.73. За время, в течение которого система совершает $N = 50$ полных колебаний, амплитуда уменьшается в 2 раза. Определить добротность Q системы. [227]

4.74. Частота свободных колебаний некоторой системы $\omega = 65$ рад/с, а ее добротность $Q = 2$. Определить собственную частоту ω_0 колебаний этой системы. [67 рад/с]

4.75. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 10$ мГн, конденсатора емкостью $C = 0{,}1$ мкФ и резистора сопротивлением $R = 20$ Ом. Определить, через сколько полных колебаний амплитуда тока в контуре уменьшится в e раз. [5]

4.76. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 25$ мГн, конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ и резистор сопротивлением $R = 1$ Ом. Конденсатор заряжен количеством электричества $Q_m = 1$ мКл. Определить: 1) период колебаний контура; 2) логарифмический декремент затухания колебаний; 3) уравнение зависимости изменения напряжения на обкладках конденсатора от времени. [1) 3,14 мс; 2) 0,063; 3) $U = 100\,e^{-20t}\cos 637\pi t$ В]

4.77. Определить логарифмический декремент, при котором энергия колебательного контура за $N = 5$ полных колебаний уменьшается в $n = 8$ раз. [0,21]

4.78. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 6$ мкГн, конденсатор емкостью $C = 10$ нФ и резистор сопротивлением $R = 10$ Ом. Определить для случая максимума тока отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля. [6]

4.79. Определить добротность Q колебательного контура, состоящего из катушки индуктивностью $L = 2$ мГн, конденсатора емкостью $C = 0{,}2$ мкФ и резистора сопротивлением $R = 1$ Ом. [100]

4.80. Частота затухающих колебаний ν в колебательном контуре с добротностью $Q = 2500$ равна 550 кГц. Определить время, за которое амплитуда тока в этом контуре уменьшится в 4 раза. [2 мс]

4.81. Определить минимальное активное сопротивление при разрядке лейденской банки, при котором разряд будет апериодическим. Емкость C лейденской банки равна 1,2 нФ, а индуктивность проводов составляет 3 мкГн. [100 Ом]

4.82. Определить закон убывания заряда конденсатора со временем при его разрядке в апериодическом режиме, т. е. когда $\delta = \omega_0$. [$Q = Q_m\,e^{-\omega_0 t}$]

4.83. Объяснить, в чем заключается различие автоколебаний и вынужденных колебаний.

4.84. Определить резонансную частоту колебательной системы, если собственная частота колебаний $\nu_0 = 300$ Гц, а логарифмический декремент $\Theta = 0{,}2$. [300 Гц]

4.85. Собственная частота ν_0 колебаний некоторой системы составляет 500 Гц. Определить частоту ν затухающих колебаний этой системы, если резонансная частота $\nu_{\text{рез}} = 499$ Гц. [499,5 Гц]

4.86. Период затухающих колебаний системы составляет 0,2 с, а отношение амплитуд первого и шестого колебаний равно 13. Определить резонансную частоту данной колебательной системы. [4,97 Гц]

4.87. Гиря массой $m = 0{,}5$ кг, подвешенная на спиральной пружине жесткостью $k = 50$ Н/м, совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0{,}5$ кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = 0{,}1\cos\omega t$ Н. Определить для данной колебательной системы: 1) коэффициент затухания δ; 2) резонансную амплитуду $A_{\text{рез}}$. [1) 0,5 с^{-1}; 2) 2 см]

4.88. Гиря массой $m = 400$ г, подвешенная на спиральной пружине жесткостью $k = 40$ Н/м, опущена в масло. Коэффициент сопротивления r для этой системы составляет 0,5 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = \cos \omega t$ Н. Определить: 1) амплитуду вынужденных колебаний, если частота вынуждающей силы вдвое меньше собственной частоты колебаний; 2) частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; 3) резонансную амплитуду. [1) 3,32 см; 2) 9,96 $с^{-1}$; 3) 0,2 м]

4.89. Гиря массой $m = 20$ г, подвешенная на спиральной пружине жесткостью $k = 50$ Н/м, совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0{,}2$ кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = 0{,}2 \cos \omega t$, Н. Определить: 1) частоту ν_0 собственных колебаний; 2) резонансную частоту $\nu_{рез}$; 3) резонансную амплитуду $A_{рез}$; 4) статическое отклонение. [1) 7,96 Гц; 2) 7,88 Гц; 3) 2 см; 4) 4 мм]

4.90. Амплитуды двух вынужденных колебаний системы с одинаковыми собственными частотами при всех значениях частоты вынуждающей силы различаются вдвое. Определить, какой одной (и только одной) из величин (массой, коэффициентом сопротивления среды, коэффициентом упругости, амплитудой вынуждающей силы) отличаются эти системы.

4.91. В цепь колебательного контура, содержащего последовательно соединенные резистор сопротивлением $R = 40$ Ом, катушку индуктивностью $L = 0{,}36$ Гн и конденсатор емкостью $C = 28$ мкФ, подключено внешнее переменное напряжение с амплитудным значением $U_m = 180$ В и частотой $\omega = 314$ рад/с. Определить: 1) амплитудное значение силы тока I_m в цепи; 2) сдвиг φ по фазе между током и внешним напряжением. [1) 4,5 А; 2) $\varphi = -1°$ (ток опережает напряжение]

4.92. В цепь колебательного контура, содержащего катушку индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн и активным сопротивлением $R = 9{,}7$ Ом, а также конденсатор емкостью $C = 40$ мкФ, подключено внешнее переменное напряжение с амплитудным значением $U_m = 180$ В и частотой $\omega = 314$ рад/с. Определить: 1) амплитудное значение силы тока I_m в цепи; 2) разность фаз φ между током и внешним напряжением; 3) амплитудное значение напряжения U_{L_m} на катушке; 4) амплитудное значение напряжения U_{C_m} на конденсаторе. [1) 9,27 А; 2) —60° (ток опережает напряжение); 3) 589 В; 4) 738 В]

4.93. Последовательно соединенные резистор с сопротивлением $R = 110$ Ом и конденсатор подключены к внешнему переменному напряжению с амплитудным значением $U_m = 110$ В. Оказалось, что амплитудное значение установившегося тока в цепи $I_m = 0{,}5$ А. Определить разность фаз между током и внешним напряжением. [$\varphi = 60°$, ток опережает напряжение]

4.94. В колебательный контур, содержащий последовательно соединенные конденсатор и катушку с активным сопротивлением, подключено внешнее переменное напряжение, частоту которого можно менять не меняя его амплитуды. При частотах внешнего напряжения $\omega_1 = 400$ рад/с и $\omega_2 = 600$ рад/с амплитуды силы тока в цепи оказались одинаковыми. Определить резонансную частоту тока. [$\sqrt{\omega_1\omega_2} = 490$ рад/с]

4.95. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 0{,}1$ мГн, резистор сопротивлением $R = 3$ Ом, а также конденсатор емкостью $C = 10$ нФ. Определить среднюю мощность, потребляемую контуром, необходимую для поддержания в нем незатухающих колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_m = 2$ В. [1,2 мВт]

4.96. В цепь переменного тока напряжением 220 В и частотой 50 Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 100$ Ом, катушка индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн и конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Определить: 1) силу тока в цепи; 2) падение напряжения на активном сопротивлении; 3) падение напряжения на конденсаторе; 4) падение напряжения на катушке. [1) 1,16 А; 2) 116 В; 3) 369 В; 4) 182 В]

4.97. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц включена катушка длиной $l = 20$ см и диаметром $d = 5$ см, содержащая $N = 500$ витков медного провода площадью поперечного сечения $S = 0{,}6$ мм^2. Определить, какая доля полного сопротивления катушки приходится на реактивное сопротивление. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм·м. [40 %]

4.98. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц включена катушка длиной $l = 30$ см и площадью поперечного сечения $S = 10$ см^2, содержащая $N = 1000$ витков. Определить активное сопротивление катушки, если известно, что сдвиг фаз φ между напряжением и током составляет 30°. [$R = 2{,}28$ Ом]

4.99. К зажимам генератора присоединен конденсатор емкостью $C = 0{,}15$ мкФ. Определить амплитудное значение напряжения на зажимах, если амплитудное значение силы тока равно 3,3 А, а частота тока составляет 5 кГц. [0,7 кВ]

4.100. Определить в случае переменного тока ($\nu = 50$ Гц) полное сопротивление участка цепи, состоящего из параллельно включенного конденсатора емкостью $C = 10$ мкФ и резистора сопротивлением $R = 50$ Ом. [49,4 Ом]

4.101. Цепь переменного тока состоит из последовательно

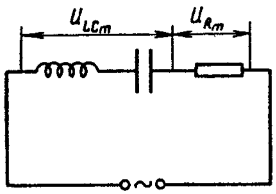


Рис. 76

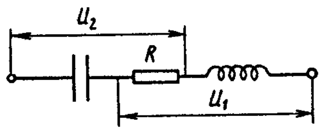


Рис. 77

соединенных катушки, конденсатора и резистора (рис. 76). Амплитудное значение суммарного напряжения на катушке и конденсаторе $U_{LC_m} = 173$ В, а амплитудное значение напряжения на резисторе $U_{R_m} = 100$ В. Определить сдвиг фаз между током и внешним напряжением. [60°]

4.102. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 100$ Ом и конденсатор емкостью $C = 22$ мкФ. Определить, какая доля напряжения, приложенного к этой цепи, приходится на падение напряжения на конденсаторе. [82,3 %]

4.103. В цепь переменного тока с частотой $\nu = 50$ Гц и действующим значением напряжения $U = 300$ В последовательно включены конденсатор, резистор сопротивлением $R = 50$ Ом и катушка индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн (рис. 77). Падения напряжения $U_1 : U_2 = 1 : 2$. Определить: 1) емкость конденсатора; 2) действующее значение силы тока. [1) 29,8 мкФ; 2) 3,32 А]

4.104. Генератор, частота которого составляет 32 кГц и амплитудное значение напряжения 120 В, включен в резонирующую цепь, емкость которой $C = 1$ нФ. Определить амплитудное значение напряжения на конденсаторе, если активное сопротивление цепи $R = 5$ Ом. [119 кВ]

4.105. В цепи переменного тока (рис. 78) с частотой $\omega = 314$ рад/с вольтметр показывает нуль при $L = 0{,}2$ Гн. Определить емкость конденсатора. [50 мкФ]

4.106. В цепи переменного тока (рис. 78) с частотой $\nu = 50$ Гц вольтметр показывает нуль при значении $C = 20$ мкФ. Определить индуктивность катушки. [0,51 Гн]

4.107. В приведенной на рис. 79 цепи переменного тока с частотой $\nu = 50$ Гц сила тока внешней (неразветвленной) цепи равна нулю. Определить емкость C конденсатора, если индуктивность L катушки равна 1 Гн. [10 мкФ]

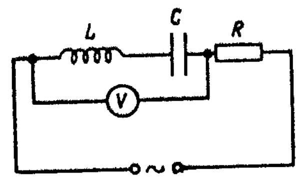


Рис. 78

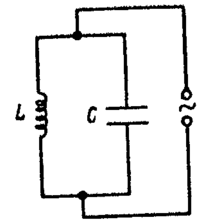


Рис. 79

4.108. Как и какими индуктивностью L и емкостью C надо подключить катушку и конденсатор к резистору сопротивлением $R = 10$ кОм, чтобы ток через катушку и конденсатор был в 10 раз больше общего тока? Частота переменного напряжения $\nu = 50$ Гц. [$L = 3{,}18$ Гн, $C = 3{,}18$ мкФ]

4.109. Активное сопротивление колебательного контура $R = 0{,}4$ Ом. Определить среднюю мощность $\langle P \rangle$, потребляемую колебательным контуром, при поддержании в нем незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением силы тока $I_m = 30$ мА. [18 мВт]

4.110. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 5$ нФ и катушку индуктивностью $L = 5$ мкГн и активным сопротивлением $R = 0{,}1$ Ом. Определить среднюю мощность $\langle P \rangle$, потребляемую колебательным контуром, при поддержании в нем незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_{mC} = 10$ В. [5 мВт]

4.111. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 6$ мкГн и конденсатор емкостью $C =$

$= 1{,}2$ нФ. Для поддержания в колебательном контуре незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_{m_C} = 2$ В необходимо подводить среднюю мощность $\langle P \rangle = 0{,}2$ мВт. Считая затухание колебаний в контуре достаточно малым, определить добротность данного контура. [141]

4.112. В сеть переменного тока с действующим значением напряжения 120 В последовательно включены проводник с активным сопротивлением 10 Ом и катушка индуктивностью 0,1 Гн. Определить частоту ν тока, если амплитудное значение силы тока в цепи равно 5 А. [51,6 Гц]

4.113. Диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого равна 2,8, используется в конденсаторе в качестве изолятора. Конденсатор, находясь под напряжением, поглощает некоторую мощность, причем при $\nu = 50$ Гц коэффициент мощности $\cos\varphi = 0{,}1$. Определить удельное сопротивление диэлектрика. [1,28 ГОм·м]

4.114. В цепь переменного тока напряжением 220 В и частотой 50 Гц включена катушка с активным сопротивлением. Сдвиг фаз между напряжением и током составляет $\pi/6$. Определить индуктивность катушки, если известно, что она поглощает мощность 445 Вт. [0,15 Гн]

4.115. Цепь, состоящая из последовательно соединенных безындукционного резистора сопротивлением $R = 100$ Ом и катушки с активным сопротивлением, включена в сеть с действующим напряжением $U = 300$ В. Воспользовавшись векторной диаграммой, определить тепловую мощность, выделяемую на катушке, если действующие значения напряжения на сопротивлении и катушке соответственно равны $U_R = 150$ В и $U_L = 250$ В. [25 Вт]

4.2. Упругие волны

Основные законы и формулы

- Связь длины волны λ, периода T колебаний и частоты ν

$$\lambda = vT; \quad v = \lambda\nu,$$

где v — скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость).

- Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x,

$$\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где $\xi(x, t)$ — смещение точек среды с координатой x в момент времени t; A — амплитуда волны; ω — циклическая (круговая) частота; $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(vT) = \omega/v$ — волновое число (λ — длина волны; v — фазовая скорость; T — период колебаний); φ_0 — начальная фаза колебаний.

- Связь между разностью фаз $\Delta\varphi$ и разностью хода Δ

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}.$$

- Условия максимума и минимума амплитуды при интерференции волн

$$\Delta_{max} = \pm 2m\frac{\lambda}{2}; \quad \Delta_{min} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$.

- Фазовая v и групповая u скорости, а также связь между ними

$$v = \frac{\omega}{k}; \quad u = \frac{d\omega}{dk}; \quad u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}.$$

- Уравнение стоячей волны

$$\xi(x, t) = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t = 2A\cos kx\cos\omega t.$$

- Координаты пучностей и узлов

$$x_п = \pm m\frac{\lambda}{2}; \quad x_у = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \text{ где } m = 0, 1, 2, \ldots.$$

- Уровень интенсивности звука (Б)

$$L = \lg(I/I_0),$$

где I — интенсивность звука; I_0 — интенсивность звука на пороге слышимости ($I_0 = 1$ пВт/м^2).

- Скорость распространения звуковых волн в газах

$$v = \sqrt{\gamma RT/M},$$

где R — молярная газовая постоянная, M — молярная масса; $\gamma = C_p/C_V$ — отношение молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме, T — термодинамическая температура.

- Эффект Доплера в акустике

$$\nu = \frac{(v \pm v_{пр})\nu_0}{v \mp v_{ист}},$$

где ν — частота звука, воспринимаемая движущимся приемником; ν_0 — частота звука, посылаемая источником; $v_{пр}$ — скорость движения приемника; $v_{ист}$ — скорость движения источника; v — скорость распространения звука. Верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит их сближение, нижний знак — в случае их взаимного удаления.

Примеры решения задач

Задача 8. Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $v = 15$ м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях $x_1 = 5$ м и $x_2 = 5{,}5$ м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = \pi/5$. Амплитуда волны $A = 4$ см. Определить: 1) длину волны; 2) уравнение волны; 3) смещение ξ_1 первой точки в момент времени $t = 3$ с.

Дано: $v = 15$ м/с, $x_1 = 5$ м, $x_2 = 5{,}5$ м, $\Delta\varphi = \pi/5$, $A = 4$ см $= 0{,}04$ м, $t = 3$ с.

Определить: 1) λ; 2) $\xi(x, t)$; 3) ξ_1.

Решение. Разность фаз колебаний двух точек волны

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x,$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$ — расстояние между этими точками.

Тогда

$$\lambda = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\Delta\varphi}.$$

Циклическая частота $\omega = 2\pi/T$, где $T = \lambda/v$. Следовательно, $\omega = 2\pi v/\lambda$.

Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x,

$$\xi(x, t) = A\cos\omega(t - x/v) = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x).$$

Чтобы найти смещение ξ_1, надо в это уравнение подставить значения t и x_1.

Вычисляя, получаем: 1) $\lambda = 5$ м; 2) $\xi(x, t) = 0{,}04 \times \cos\left(6\pi t - \frac{2\pi}{5}x\right)$, м; 3) $\xi_1 = 4$ см.

Задача 9. Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, подчиняющихся закону $\xi = A\sin\omega t$, а другой конец жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от более плотной среды, определить: 1) уравнение стоячей волны; 2) координаты узлов; 3) координаты пучностей.

Дано $\xi = A\sin\omega t$.

Определить: 1) $\xi(x, t)$; 2) $x_у$; 3) $x_п$.

Решение. Уравнение падающей волны

$$\xi_1(x, t) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \tag{1}$$

а уравнение отраженной —

$$\xi_2(x, t) = A\sin[\omega(t - x/v) + \pi] = -A\sin[\omega(t + x/v)] \tag{2}$$

(учли изменение фазы на π, так как отражение происходит от более плотной среды). Сложив уравнения (1) и (2), получим уравнение стоячей волны

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = A\sin\omega(t - x/v) - A\sin\omega(t + x/v),$$

откуда

$$\xi(x, t) = 2A\sin\omega\frac{x}{v}\cos\omega t = 2A\sin(2\pi x/\lambda)\cos\omega t.$$

В точках среды, где $2\pi x/\lambda = \pm m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), амплитуда колебаний обращается в нуль (наблюдаются узлы), в точках среды, где $2\pi x/\lambda = \pm(m + 1/2)\pi$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), амплитуда колебаний достигает максимального значения, равного $2A$ (наблюдаются пучности). Таким образом:

координаты узлов $x_у = \pm m\frac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$);

координаты пучностей, $x_п = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$).

Ответ. 1) $\xi(x, t) = 2A\sin(2\pi x/\lambda)\cos\omega t$; 2) $x_у = \pm m\frac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$); 3) $x_п = \pm(m + 1/2)\frac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$).

Задача 10. Неподвижный приемник при приближении источника звука, излучающего волны с частотой $\nu_0 = 360$ Гц, регистрирует звуковые колебания с частотой $\nu = 400$ Гц. Принимая температуру воздуха $T = 290$ К, его молярную массу $M = 0{,}029$ кг/моль, определить скорость движения источника звука.

Дано: $\nu_0 = 360$ Гц, $\nu = 400$ Гн, $T = 290$ К, $M = 0{,}029$ кг/моль.

Определить $v_{ист}$.

Решение. Исходя из общей формулы для эффекта Доплера в акустике и учитывая, что приемник покоится, а источник приближается к приемнику, получим

$$\nu = \frac{v\nu_0}{v - v_{\text{ист}}},$$

где v — скорость распространения звука. Отсюда

$$v_{\text{ист}} = v(1 - \nu_0/\nu). \qquad (1)$$

Скорость распространения звуковых волн в газах

$$v = \sqrt{\gamma RT/M}, \qquad (2)$$

где для воздуха $\gamma = (i+2)/i = 7/5 = 1{,}4$.

Подставив (2) в (1), найдем искомую скорость движения источника звука:

$$v_{\text{ист}} = (1 - \nu_0/\nu)\sqrt{\gamma RT/M}.$$

Вычисляя, получаем $v_{\text{ист}} = 34{,}1$ м/с.

Задачи

4.116. Определить разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и друг от друга на расстоянии $\Delta l = 1$ м, если длина волны $\lambda = 0{,}5$ м. [$\Delta\varphi = 4\pi$, точки колеблются в одинаковых фазах]

4.117. Две точки лежат на луче и находятся от источника колебаний на расстояниях $x_1 = 4$ м и $x_2 = 7$ м. Период колебаний $T = 20$ мс и скорость v распространения волны равна 300 м/с. Определить разность фаз колебаний этих точек. [$\Delta\varphi = \pi$, точки колеблются в противоположных фазах]

4.118. Волна распространяется в упругой среде со скоростью $v = 150$ м/с. Определить частоту ν колебаний, если минимальное расстояние Δx между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно 0,75 м. [100 Гц]

4.119. Определить длину волны λ, если числовое значение волнового вектора $\mathbf{k}$ равно 0,02512 см$^{-1}$. [2,5 м]

4.120. Звуковые колебания с частотой $\nu = 450$ Гц и амплитудой $A = 0{,}3$ мм распространяются в упругой среде. Длина волны $\lambda = 80$ см. Определить: 1) скорость распространения волн; 2) максимальную скорость частиц среды. [1) 360 м/с; 2) 84,8 см/с]

4.121. Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $v = 10$ м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях $x_1 = 7$ м и $x_2 = 10$ м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 3\pi/5$. Амплитуда волны $A = 5$ см. Определить: 1) длину волны λ; 2) уравнение волны; 3) смещение ξ_2 второй точки в момент времени $t = 2$ с. [1) 10 м; 2) $\xi(x, t) = 0{,}05\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{5}x\right)$ м; 3) 5 см]

4.122. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $v = 10$ м/с. Амплитуда колебаний точек шнура $A = 5$ см, а период колебаний $T = 1$ с. Записать уравнение волны и определить: 1) длину волны; 2) фазу колебаний, смещение, скорость и ускорение точки, расположенной на расстоянии $x = 9$ м от источника колебаний в момент времени $t = 2{,}5$ с. $\left[\xi(x, t) = 5\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{5}x\right)\right.$ см; 1) $\lambda = 10$ м; 2) $\varphi = 3{,}2\pi$, $\xi = -4$ см, $\dot{\xi} = 18{,}5$ см/с, $\left.\ddot{\xi} = 160 \text{ см/с}^2\right]$

4.123. Убедиться, что волновому уравнению $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \times \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ удовлетворяет плоская волна $\xi(x, t) = A \times \cos[\omega(t - x/v) + \varphi_0]$.

4.124. Вывести связь между групповой и фазовой скоростями. $\left[u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}\right]$

4.125. Доказать, что в недиспергирующей среде групповая и фазовая скорости равны.

4.126. Определить разность числовых значений фазовой и групповой скоростей для частоты $\nu = 800$ Гц, если фазовая скорость задается выражением $v = a_0/\sqrt{\nu + b}$, где $a_0 = 24$ м/с, $b = 100$ Гц. [2,46 м/с]

4.127. Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой $\nu = 400$ Гц. Скорость распространения колебаний в среде $v = 1$ км/с. Определить, при какой наименьшей разности хода будет наблюдаться: 1) максимальное усиление колебаний; 2) максимальное ослабление колебаний. [1) 2,5 м; 2) 1,25 м]

4.128. Два когерентных источника посылают поперечные волны в одинаковых фазах. Периоды колебаний $T = 0{,}2$ с, скорость распространения волн в среде $v = 800$ м/с. Определить, при какой разности хода в случае наложения волн будет наблюдаться: 1) ослабление колебаний; 2) усиление колебаний.

[1) $\pm 80(2m+1)$, м ($m=0, 1, 2, ...$); 2) $\pm 160\,m$, м ($m=0, 1, 2, ...$)]

4.129. По поверхности воды распространяются две волны, возбуждаемые двумя точечными когерентными источниками. Какую форму имеют линии, на которых лежат точки, имеющие одну и ту же постоянную разность хода? [Гиперболы, в фокусах которых находятся источники.]

4.130. Два динамика расположены на расстоянии $d=0{,}5$ м друг от друга и воспроизводят один и тот же музыкальный тон на частоте $\nu=1500$ Гц. Приемник находится на расстоянии $l=4$ м от центра динамиков. Принимая скорость звука $v=340$ м/с, определить, на какое расстояние от центральной линии параллельно динамикам надо отодвинуть приемник, чтобы он зафиксировал первый интерференционный минимум. [90,7 см]

4.131. Два динамика расположены на расстоянии $d=2{,}5$ м друг от друга и воспроизводят один и тот же музыкальный тон на определенной частоте, который регистрируется приемником, находящимся на расстоянии $l=3{,}5$ м от центра динамиков. Если приемник передвинуть от центральной линии параллельно динамикам на расстояние $x=1{,}55$ м, то он фиксирует первый интерференционный минимум. Скорость звука $v=340$ м/с. Определить частоту звука. [175 Гц]

4.132. Образование стоячих волн наблюдают обычно при интерференции бегущей и отраженной волн. Объяснить, когда и почему на границе отражения получается узел или пучность.

4.133. Объяснить, где человек слышит более громкий звук: в пучности или в узле стоячей волны.

4.134. Определить длину волны λ, если расстояние Δl между первым и четвертым узлами стоячей волны равно 30 см. [20 см]

4.135. Микроволновой генератор излучает в положительном направлении оси x плоские электромагнитные волны, которые затем отражаются обратно. Точки M_1 и M_2 соответствуют положениям двух соседних минимумов интенсивности и отстоят друг от друга на расстоянии $l=5$ см. Определить частоту микроволнового генератора. [3 Гц]

4.136. Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, подчиняющихся закону $\xi = A\cos\omega t$, а другой его конец жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от менее плотной среды, определить характер колебаний в любой точке стержня. [$\xi = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$ — уравнение стоячей волны; если $x=\pm m\lambda/2$ ($m=0, 1, 2, ...$) — пучности, если $x=\pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ ($m=0, 1, 2, ...$) — узлы]

4.137. Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, подчиняющихся закону $\xi = A\cos\omega t$, а другой его конец жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от более плотной среды, определить характер колебаний в любой точке стержня. [$\xi = 2A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\omega t$ — уравнение стоячей волны; если $x=\pm m\lambda/2$ ($m=0, 1, 2, ...$) — узлы, если $x=\pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ ($m=0, 1, 2, ...$) — пучности].

4.138. Вывести условие для координат пучностей и узлов стоячей волны. [$x_п = \pm\frac{m\lambda}{2}$, $x_у = \pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\times\frac{\lambda}{2}$ ($m=0, 1, 2, ...$)]

4.139. Для определения скорости звука в воздухе методом акустического резонанса используется труба с поршнем и звуковой мембраной, закрывающей один из ее торцов. Расстояние между соседними положениями поршня, при котором наблюдается резонанс на частоте $\nu=2500$ Гц, составляет $l=6{,}8$ см. Определить скорость звука в воздухе. [340 м/с]

4.140. Стержень с закрепленными концами имеет длину $l=70$ см. При трении стержень издает звук, основная частота (наименьшая частота, при которой может возникать стоячая волна) которого $\nu_0=1$ кГц. Определить: 1) скорость звука v в стержне; 2) какие обертоны (волны с кратными основными частотами) может иметь звук, издаваемый стержнем. [1) 1,4 км/с; 2) обертоны $\nu_i = k\nu_0$ ($k=2, 3, ...$)]

4.141. Труба, длина которой $l=1$ м, заполнена воздухом и открыта с одного конца. Принимая скорость звука $v=340$ м/с, определить, при какой наименьшей частоте в трубе будет возникать стоячая звуковая волна. [85 Гц]

4.142. Человеческое ухо может воспринимать звуки, соответствующие граничным частотам $\nu_1 = 16$ Гц и $\nu_2 = 20$ кГц. Принимая скорость звука в воздухе равной 343 м/с, определить область слышимости звуковых волн. [17 мм—21,4 м]

4.143. Определить интенсивность звука (Вт/м^2), уровень интенсивности L которого составляет 67 дБ. Интенсивность звука на пороге слышимости $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2. [5,01 мкВт/м^2]

4.144. Определить отношение интенсивностей звуков, если они отличаются по уровню громкости на 2 фон. [$I_1/I_2 = 1{,}58$]

4.145. Разговор в соседней комнате громкостью в 40 фон слышен так, как шепот громкостью 20 фон. Определить отношение интенсивностей этих звуков. [$I_1/I_2 = 100$]

4.146. Определить, на сколько фонов увеличился уровень громкости звука, если интенсивность звука увеличилась: 1) в 1000 раз; 2) в 10 000 раз. [1) на 30 фон; 2) на 40 фон]

4.147. Скорость распространения звуковой волны в газе с молярной массой $M = 2{,}9 \cdot 10^{-2}$ кг/моль при $t = 20\,°C$ составляет 343 м/с. Определить отношение молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме. [1;4]

4.148. Средняя квадратичная скорость $\langle v_{кв} \rangle$ молекул двухатомного газа при некоторых условиях составляет 480 м/с. Определить скорость v распространения звука в газе при тех же условиях. [328 м/с]

4.149. Доказать, что формула $v = \sqrt{\gamma RT/M}$, выражающая скорость звука в газе, может быть представлена в виде $v = \sqrt{\gamma p/\rho}$, где γ — отношение молярных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме; p — давление газа; ρ — его плотность.

4.150. Плотность ρ некоторого двухатомного газа при нормальном давлении равна 1,78 кг/м^3. Определить скорость распространения звука в газе при этих условиях. [282 м/с]

4.151. Движущийся по реке теплоход дает свисток частотой $\nu_0 = 400$ Гц. Наблюдатель, стоящий на берегу, воспринимает звук свистка частотой $\nu = 395$ Гц. Принимая скорость звука $v = 340$ м/с, определить: 1) скорость движения теплохода; 2) приближается или удаляется теплоход от наблюдателя. [4,3 м/с]

4.152. В реке, скорость течения которой равна v, установлен неподвижный источник колебаний, создающий в воде колебания частотой ν_0. По разные стороны на равных расстояниях от источника установлены неподвижные приемники колебаний $П_1$ и $П_2$. Определить частоты, регистрируемые этими приемниками. [$\nu_1 = \nu_2 = \nu_0$]

4.153. Наблюдатель, стоящий на станции, слышит гудок проходящего электровоза. Когда электровоз приближается, частота звуковых колебаний гудка равна ν_1, а когда удаляется — ν_2. Принимая, что скорость v звука известна, определить: 1) скорость $v_{ист}$ электровоза; 2) собственную частоту ν_0 колебаний гудка. $\left[1)\ v_{ист} = \dfrac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} v;\ 2)\ \nu_0 = \dfrac{2\nu_1\nu_2}{\nu_1 + \nu_2}\right]$

4.154. Электропоезд проходит со скоростью 72 км/ч мимо неподвижного приемника и дает гудок, частота которого 300 Гц. Принимая скорость звука равной 340 м/с, определить скачок частоты, воспринимаемый приемником. [$\Delta\nu = 34{,}5$ Гц]

4.155. Поезд проходит со скоростью 54 км/ч мимо неподвижного приемника и подает звуковой сигнал. Приемник воспринимает скачок частотой $\Delta\nu = 53$ Гц. Принимая скорость звука равной 340 м/с, определить частоту тона звукового сигнала гудка поезда. [599 Гц]

4.156. Два катера движутся навстречу друг другу. С первого катера, движущегося со скоростью $v_1 = 10$ м/с, посылается ультразвуковой сигнал частотой $\nu_1 = 50$ Гц, который распространяется в воде. После отражения от второго катера сигнал принят первым катером с частотой $\nu_2 = 52$ кГц. Принимая скорость распространения звуковых колебаний в воде равной 1,54 км/с, определить скорость движения второго катера. [20,2 м/с]

4.3. Электромагнитные волны

Основные законы и формулы

● Фазовая скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — скорость распространения света в вакууме; ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные;

ε и μ — соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды.

● Связь между мгновенными значениями напряженностей электрического (E) и магнитного (H) полей электромагнитной волны

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E=\sqrt{\mu_0\mu}H,$$

где E и H — соответственно мгновенные значения напряженностей электрического и магнитного полей волны.

● Уравнения плоской электромагнитной волны

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\cos(\omega t-kx+\varphi);\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_0\cos(\omega t-kx+\varphi),$$

где $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω — круговая частота; $k=\omega/v$ — волновое число; φ — начальные фазы колебаний в точках с координатой $x=0$.

● Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$w=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu_0\mu H^2}{2}.$$

● Плотность потока электромагнитной энергии — вектор Умова — Пойнтинга

$$\mathbf{S}=[\mathbf{EH}].$$

Примеры решения задач

Задача 11. Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной и изотропной среде с $\varepsilon=2$ и $\mu=1$. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0=12$ В/м. Определить: 1) фазовую скорость волны; 2) амплитуду напряженности магнитного поля волны.

Дано: $\varepsilon=2$, $\mu=1$, $E_0=12$ В/м.

Определить: 1) v; 2) H_0.

Решение. Фазовая скорость электромагнитных волн

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме.

В бегущей электромагнитной волне мгновенные значения E и H в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E=\sqrt{\mu_0\mu}H.$$

Тогда для амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей волны

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E_0=\sqrt{\mu_0\mu}H_0,$$

откуда искомая амплитуда напряженности магнитного поля волны

$$H_0=\frac{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}}{\sqrt{\mu_0\mu}}E_0.$$

Вычисляя, получаем: 1) $v=2{,}12\cdot10^8$ м/с; 2) $H_0=45$ мА/м.

Задача 12. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Интенсивность волны, т. е. средняя энергия, проходящая через единицу поверхности за единицу времени, составляет 21,2 мкВт/м². Определить амплитуду напряженности электрического поля волны.

Дано: $\varepsilon=1$, $\mu=1$, $I=21{,}2$ мкВт/м$^2=2{,}12\cdot10^{-5}$ Вт/м².

Определить E_0.

Решение. Так как интенсивность электромагнитной волны определена как средняя энергия, проходящая через единицу поверхности за единицу времени, то

$$I=\langle S\rangle,\qquad(1)$$

где S — модуль вектора плотности потока электромагнитной энергии — модуль вектора Умова — Пойнтинга. Согласно определению,

$$S=EH,$$

где E и H — соответственно мгновенные значения напряженностей электрического и магнитного полей волны, описываемые уравнениями

$$E=E_0\cos(\omega t-kx);$$
$$H=H_0\cos(\omega t-kx),$$

где E_0 и H_0 — соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω — круговая частота; $k=\omega/v$ — волновое число (φ — начальная фаза колебаний — принята равной нулю).

Мгновенное значение модуля вектора Умова — Пойнтинга

$$S=E_0H_0\cos^2(\omega t-kx),$$

а его среднее значение

$$\langle S\rangle=\frac{1}{2}E_0H_0\qquad(2)$$

(учли, что $\langle\cos^2(\omega t-kx)\rangle=1/2$). Записав (см. решение предыдущей задачи)

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\,E_0=\sqrt{\mu_0\mu}\,H_0,$$

получим

$$H_0=\frac{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}}{\sqrt{\mu_0\mu}}E_0=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0 \qquad (3)$$

(учли, что электромагнитная волна распространяется в вакууме).

Подставив (3) в (2) и учитывая (1), найдем искомую амплитуду напряженности электрического поля волны:

$$E_0=\sqrt{2I\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}.$$

Вычисляя, получаем $E_0=126$ мВ/м.

Задачи

4.157. Скорость распространения электромагнитных волн в некоторой среде составляет $v=250$ Мм/с. Определить длину волны электромагнитных волн в этой среде, если их частота в вакууме $\nu_0=1$ МГц. [250 м]

4.158. Для демонстрации преломления электромагнитных волн Герц применял призму, изготовленную из парафина. Определить показатель преломления парафина, если его диэлектрическая проницаемость $\varepsilon=2$ и магнитная проницаемость $\mu=1$. [1,41]

4.159. Электромагнитная волна с частотой $\nu=5$ МГц переходит из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$ в вакуум. Определить приращение ее длины волны. [17,6 м]

4.160. Радиолокатор обнаружил в море подводную лодку, отраженный сигнал от которой дошел до него за $t=36$ мкс. Учитывая, что диэлектрическая проницаемость воды $\varepsilon=81$, определить расстояние от локатора до подводной лодки. [600 м]

4.161. После того как между внутренним и внешним проводниками кабеля поместили диэлектрик, скорость распространения электромагнитных волн в кабеле уменьшилась на 63 %. Определить диэлектрическую восприимчивость вещества прослойки. [6,3]

4.162. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C=0{,}5$ нФ и катушку индуктивностью $L=0{,}4$ мГн. Определить длину волны излучения, генерируемого контуром. [843 м]

4.163. Определить длину электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, если максимальный заряд на обкладках конденсатора $Q_m=50$ нКл, а максимальная сила тока в контуре $I_A=1{,}5$ А. Активным сопротивлением контура пренебречь. [62,8 м]

4.164. Длина λ электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, равна 12 м. Пренебрегая активным сопротивлением контура, определить максимальный заряд Q_m на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока в контуре $I_m=1$ А. [6,37 нКл]

4.165. Два параллельных провода, одни концы которых изолированы, погружены в трансформаторное масло, а вторые индуктивно соединены с генератором электромагнитных колебаний частотой 505 МГц, погружены в трансформаторное масло. При соответствующем подборе частоты колебаний в системе возникают стоячие волны. Расстояние между двумя пучностями стоячих волн на проводах равно 20 см. Принимая магнитную проницаемость масла равной единице, определить его диэлектрическую проницаемость [2,2]

4.166. Два параллельных провода, одни концы которых изолированы, а вторые индуктивно соединены с генератором электромагнитных колебаний, погружены в спирт. При соответствующем подборе частоты колебаний в системе возникают стоячие волны. Расстояние между двумя узлами стоячих волн на проводах равно 40 см. Принимая диэлектрическую проницаемость спирта $\varepsilon=26$, а его магнитную проницаемость $\mu=1$, определить частоту колебаний генератора. [73,5 МГц]

4.167. Показать, что плоская монохроматическая волна $E_y=E_0\cos(\omega t-kx+\varphi)$ удовлетворяет волновому уравнению $\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$, где v — фазовая скорость электромагнитных волн.

4.168 В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна 10 В/м. Определить амплитуду напряженности магнитного поля волны. [0,265 А/м]

4.169. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны равна 1 мА/м. Определить амплитуду напряженности электрического поля волны. [0,377 В/м]

4.170. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская монохроматическая электромагнитная волна, описываемая уравнениями

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - kx).$$

Эта волна отражается от плоскости, перпендикулярной оси x. Записать уравнения, описывающие отраженную волну, а также объяснить их физический смысл.

4.171. Рассмотреть суперпозицию двух плоских монохроматических электромагнитных волн, распространяющихся вдоль оси x в противоположных направлениях. Начальную фазу прямой и обратной волн принять равной нулю. Определить координаты пучностей и узлов для: 1) электрического вектора **E**; 2) магнитного вектора **H** возникшей в результате суперпозиции стоячей волны. [1) $x_п = \pm m\lambda/2$, $x_у = \pm(m+1/2)\lambda/2$ $(m = 0, 1, 2, ...)$; 2) $x_п = \pm(m+1/2)\lambda/2$, $x_у = \pm m\lambda/2$ $(m = 0, 1, 2, ...)$; пучности **E** совпадают с узлами **H**, и наоборот]

4.172. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна и падает по нормали на поверхность тела, полностью ее поглощающего. Амплитуда напряженности магнитного поля волны равна 0,15 А/м. Определить давление, оказываемое волной на тело. Воспользоваться результатом выводов теории Максвелла о том, что если тело полностью поглощает падающую на него энергию, то давление равно среднему значению объемной плотности энергии в падающей электромагнитной волне. [14,1 нПа]

4.173. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна и падает по нормали на поверхность тела, полностью ее поглощающего. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна 2 В/м. Определить давление, оказываемое волной на тело (см. задачу 4.172). [8,85 пПа]

4.174. Плоская монохроматическая электромагнитная волна распространяется вдоль оси x. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 5$ мВ/м, амплитуда напряженности магнитного поля волны $H_0 = 1$ мА/м. Определить энергию, перенесенную волной за время $t = 10$ мин через площадку, расположенную перпендикулярно оси x, площадью поверхности $S = 15$ см^2. Период волны $T \ll t$. [$W = E_0 H_0 S t/2 = 2{,}25$ мкДж]

4.175. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет 50 мВ/м. Определить интенсивность волны I, т. е. среднюю энергию, проходящую через единицу поверхности в единицу времени. [33,1 мкВт/м^2]

4.176. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля составляет 5 мА/м. Определить интенсивность волны I (см. задачу 4.175). [4,71 мВт/м^2]

5 Оптика. Квантовая природа излучения

5.1. Элементы геометрической и электронной оптики

Основные законы и формулы

● Законы отражения и преломления света

$$i_1' = i_1;\quad \sin i_1/\sin i_2 = n_{21},$$

где i_1 — угол падения; i_1' — угол отражения; i_2 — угол преломления; $n_{21} = n_2/n_1$ — относительный показатель преломления второй среды относительно первой; n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления первой и второй среды.

● Предельный угол полного отражения при распространении света из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную

$$\sin i_{\text{пр}} = n_2/n_1 = n_{21}.$$

● Преломление на сферической поверхности (для параксиальных лучей)

$$\frac{n_2}{b} - \frac{n_1}{a} = \frac{n_2 - n_1}{R},$$

где R — радиус сферической поверхности, n_1 и n_2 — показатели преломления сред по разные стороны сферической поверхности; a — расстояние от точки, лежащей на оптической оси сферической поверхности, до преломляющей поверхности; b — расстояние от поверхности до изображения. В формуле $R > 0$ для выпуклой поверхности, $R < 0$ для вогнутой.

● Формула сферического зеркала

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где a и b — соответственно расстояния от полюса зеркала до предмета и изображения; f — фокусное расстояние зеркала; R — радиус кривизны зеркала.

● Оптическая сила тонкой линзы

$$\Phi = \frac{1}{f} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где f — фокусное расстояние линзы; $N = n/n_1$ — относительный показатель преломления (n и n_1 — соответственно абсолютные показатели преломления линзы и окружающей среды); R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхностей ($R>0$ для выпуклой поверхности; $R<0$ для вогнутой); a и b — соответственно расстояния от оптического центра линзы до предмета и изображения.

● Сила излучения

$$I_e = \Phi_e/\omega,$$

где Φ_e — поток излучения источника; ω — телесный угол, в пределах которого это излучение распространяется.

● Полный световой поток, испускаемый изотропным точечным источником,

$$\Phi_0 = 4\pi I,$$

где I — сила света источника.

● Светимость поверхности

$$R = \Phi/S,$$

где Φ — световой поток, испускаемый поверхностью; S — площадь этой поверхности.

● Яркость B_φ светящейся поверхности в некотором направлении φ

$$B_\varphi = I/(S\cos\varphi),$$

где I — сила света; S — площадь поверхности; φ — угол между нормалью к элементу поверхности и направлением наблюдения.

● Освещенность E поверхности

$$E = \Phi/S,$$

где Φ — световой поток, падающий на поверхность; S — площадь этой поверхности.

● Связь светимости R и яркости B при условии, что яркость не зависит от направления,

$$R = \pi B.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку ($n = 1{,}6$) под углом $i = 45°$. Определить толщину пластинки, если вышедший из пластинки луч смещен относительно продолжения падающего луча на расстояние $h = 2$ см.

Дано: $n = 1{,}6$, $i = 45°$, $h = 2$ см $= 0{,}02$ м.

Определить d.

Решение. Вышедший из пластинки луч будет параллелен падающему (ход лучей показан на рис. 80). Из рисунка следует, что

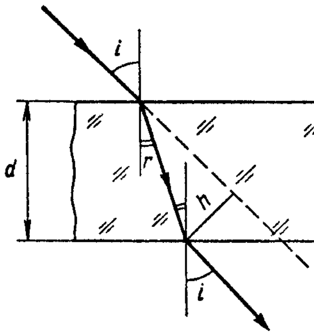


Рис. 80

$$d/\cos r = h/\sin(i-r),$$

откуда

$$d=\frac{h\cos r}{\sin(i-r)}=$$

$$=\frac{h\cos r}{\sin i\cos r-\cos i\sin r}. \qquad (1)$$

Согласно закону преломления,

$$\sin i/\sin r = n,$$

откуда $\sin r=\sin i/n$. Подставив это значение в формулу (1), а также выразив косинус угла через синус, найдем искомую толщину пластинки:

$$d=\frac{h\sqrt{n^2-\sin^2 i}}{\sin i(\sqrt{n^2-\sin^2 i}-\sqrt{1-\sin^2 i})}.$$

Вычисляя, получим $d = 5{,}58$ см.

Задача 2. Светильник в виде равномерно светящегося шара в 500 кд имеет диаметр 50 см. Определить: 1) полный световой поток Ф, излучаемый светильником; 2) его светимость R; 3) освещенность E_1, светимость R_1 и яркость B_1 экрана, на который падает 20 % светового потока, излучаемого светильником. Площадь экрана составляет 0,5 м^2, а коэффициент отражения света его поверхностью $\rho=0{,}7$.

Дано: $I=500$ кд, $d=50$ см $=0{,}5$ м, $\Phi_1/\Phi=0{,}2$, $S_1=0{,}5$ м^2, $\rho=0{,}7$.

Определить: 1) Φ; 2) R; 3) E_1, R_1, B_1.

Решение. Полный световой поток, испускаемый изотропным точечным источником,

$$\Phi=4\pi I.$$

Светимость источника света

$$R=\Phi/S,$$

где S — площадь поверхности светильника: $S=4\pi r^2=\pi d^2$. Тогда

$$R=4\pi I/(\pi d^2)=4I/d^2.$$

Так как, по условию, на экран падает световой поток $\Phi_1=0{,}2\Phi$, то освещенность экрана

$$E_1=\Phi_1/S_1=0{,}2\ \Phi/S_1.$$

Светимость экрана

$$R_1=\rho E_1.$$

Яркость экрана

$$B_1=R_1/\pi.$$

Вычисляя, получаем: 1) $\Phi=6{,}28$ клм; 2) $R=8$ клм/м^2; 3) $E_1=2{,}51$ клк; $R_1=1{,}76$ клм/м^2; $B_1=560$ кд/м^2.

Задачи

5.1. На горизонтальном дне бассейна глубиной $h=1{,}5$ м лежит плоское зеркало. Луч света входит в воду под углом $i_1=45°$. Определить расстояние s от места вхождения луча в воду до места выхода его на поверхность воды после отражения от зеркала. Показатель преломления воды $n=1{,}33$. [1,88 м]

5.2. Луч света падает на плоскую границу раздела двух сред, частично отражается и частично преломляется. Определить угол падения, при котором отраженный луч перпендикулярен преломленному лучу. [$i_1=\operatorname{arctg} n_{21}$]

5.3. На плоскопараллельную стеклянную ($n=1{,}5$) пластинку толщиной $d=5$ см падает под углом $i=30°$ луч света. Определить величину бокового смещения луча, прошедшего сквозь эту пластинку. [9,69 мм]

5.4. Между двумя стеклянными пластинками с показателями преломления n_1 и n_2 находится тонкий слой жидкости (рис. 81). Луч света, распространяющийся в первой пластинке под углом i_1 (меньше предельного), выходя из слоя жидкости, входит во вторую пластинку под углом i_2. Доказать, что в данном случае выполняется закон преломления $\sin i_1/\sin i_2=n_2/n_1$ независимо от присутствия слоя жидкости между пластинками.

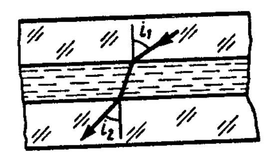


Рис. 81

5.5. Человек с лодки рассматривает предмет, лежащий на дне водоема ($n=1{,}33$). Определить его глубину, если при определении «на глаз» по вертикальному направлению глубина водоема кажется равной 1,5 м. [2 м]

5.6. Человек с лодки рассматривает предмет, лежащий на дне. Глубина водоема везде одинакова и равна H.

Определить зависимость кажущейся глубины h предмета от угла i, образуемого лучом зрения с нормалью к поверхности воды. $\left[h = \dfrac{Hn^2 \cos^3 i}{(n^2 - \sin^2 i)^{3/2}} \right]$

5.7. Предельный угол полного отражения на границе стекло — жидкость $i_{пр} = 65°$. Определить показатель преломления жидкости, если показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. [1,36]

5.8. Луч света выходит из стекла в вакуум. Предельный угол $i_{пр} = 42°$. Определить скорость света в стекле. [201 Мм/с]

5.9. На дне сосуда, наполненного водой ($n = 1{,}33$) до высоты $h = 25$ см, находится точечный источник света. На поверхности воды плавает непрозрачная пластинка так, что центр пластинки находится над источником света. Определить минимальный диаметр пластинки, при котором свет не пройдет через поверхность воды. [57 см]

5.10. Длинное тонкое волокно, выполненное из прозрачного материала с показателем преломления $n = 1{,}35$, образует световод. Определить максимальный угол α к оси световода, под которым световой луч еще может падать на торец, чтобы пройти световод без ослабления. [65°]

5.11. Расстояние a светящейся точки S до вогнутого сферического зеркала равно двум радиусам кривизны. Точка S находится на главной оптической оси. Определить положение изображения точки и построить это изображение. [$b = 2R/3$]

5.12. На рис. 82 показаны положения главной оптической оси MN сферического зеркала, светящейся точки S и ее изображения S'. Определить построением положение центра сферического зеркала и его фокуса. Указать вид использованного зеркала

5.13. На рис. 83 показаны положения главной оптической оси MN сферического зеркала, светящейся точки S и ее изображения S'. Определить построением положение центра сферического зеркала и его фокуса Указать вид использованного зеркала.

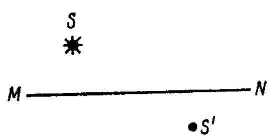


Рис. 82

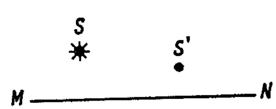


Рис. 83

5.14. Вогнутое сферическое зеркало дает действительное изображение, которое в три раза больше предмета. Определить фокусное расстояние зеркала, если расстояние между предметом и изображением равно 20 см. [7,5 см]

5.15. Выпуклое сферическое зеркало имеет радиус кривизны 60 см. На расстоянии 10 см от зеркала поставлен предмет высотой 2 см. Определить: 1) положение изображения; 2) высоту изображения. Построить чертеж. [1) Изображение мнимое на расстоянии 7,5 см от полюса зеркала; 2) 1,5 см]

5.16. Построить изображение произвольной точки S, которая лежит на главной оптической оси собирающей линзы.

5.17. Построить изображение произвольной точки S, которая лежит на главной оптической оси рассеивающей линзы.

5.18. Определить построением ход луча после преломления его собирающей (рис. 84, *а*) и рассеивающей (рис. 84, *б*) линзами. На рисунках MN — положение главной оптической оси; O — оптический центр линзы; F — фокусы линзы. Среды по обе стороны линзы одинаковы.

5.19. На рис. 85 показаны положение главной оптической оси MN тонкой собирающей линзы и ход одного луча

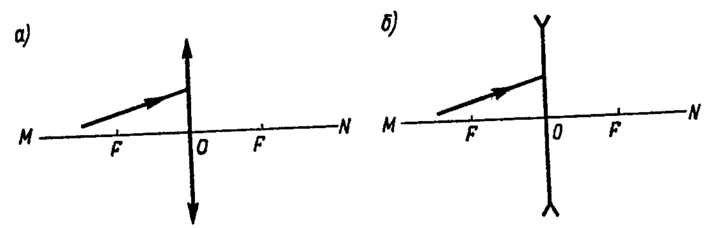


Рис. 84

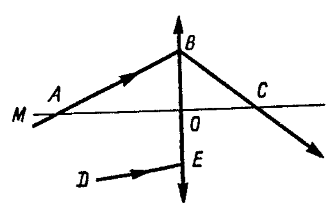


Рис. 85

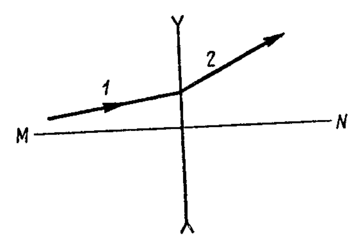


Рис. 86

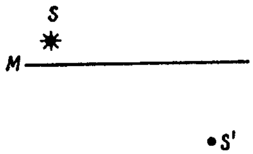


Рис. 87

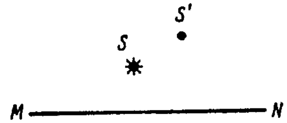


Рис. 88

ABC через эту линзу. Построить ход произвольного луча DE. Среды по обе стороны линзы одинаковы.

5.20. На рис. 86 показаны положение главной оптической оси MN тонкой рассеивающей линзы, ход луча *1*, падающего на линзу, и преломленного луча *2*. Определить построением оптический центр и фокусное расстояние линзы. Среды по обе стороны линзы одинаковы.

5.21. На рис. 87 показаны положения главной оптической оси MN тонкой линзы, светящейся точки S и ее изображения S'. Определить построением оптический центр линзы и ее фокусы. Указать вид линзы. Среды по обе стороны линзы одинаковы.

5.22. На рис. 88 показаны положения главной оптической оси MN тонкой линзы, светящейся точки S и ее изображения S'. Определить построением положения оптического центра линзы и ее фокусов. Указать вид линзы. Среды по обе стороны линзы одинаковы.

5.23. На рис. 89 показаны положения главной оптической оси MN тонкой линзы, светящейся точки S и ее изображения S'. Определить построением положения оптического центра линзы и ее фокусов. Указать вид линзы. Среды по обе стороны линзы одинаковы.

5.24. Двояковыпуклая тонкая линза (показатель преломления n) с радиусами кривизны R_1 и R_2 находится

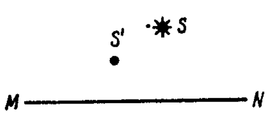


Рис. 89

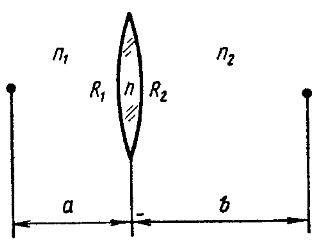


Рис. 90

в однородной среде с показателем преломления n_1. Вывести формулу этой линзы, используя принцип Ферма. $\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(N-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),\text{ где } N=n/n_1\right]$

5.25. Выпукло-вогнутая тонкая линза (показатель преломления n) с радиусами кривизны R_1 (передняя поверхность) и R_2 (задняя поверхность) находится в однородной среде с показателем преломления n_1. Вывести формулу этой линзы, рассматривая последовательное преломление света на двух сферических поверхностях. $\left[\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=(N-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right),\text{ где } N=n/n_1\right]$

5.26. Необходимо изготовить плосковыпуклую линзу с оптической силой $\Phi=4$ дптр. Определить радиус кривизны выпуклой поверхности линзы, если показатель преломления материала линзы равен 1,6. [15 см]

5.27. Тонкая линза с показателем преломления n и радиусами кривизны R_1 и R_2 находится на границе раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 (рис. 90). Пусть a и b — соответственно расстояния от предмета до линзы и от изображения ло линзы; f_1 и f_2 — соответствующие фокусные расстояния. Доказать справедливость соотношения $f_1/a+f_2/b=1$.

5.28. Определить расстояние a от двояковыпуклой линзы до предмета, при котором расстояние от предмета до действительного изображения будет минимальным. $[a=2f]$

5.29. Двояковыпуклая линза с показателем преломления $n=1{,}5$ имеет одинаковые радиусы кривизны поверхностей, равные 10 см. Изображение предмета с помощью этой линзы оказывается в 5 раз больше предмета. Определить расстояние от предмета до изображения. [72 см]

5.30. Из тонкой плоскопараллельной стеклянной пластинки изготовлены три линзы (рис. 91). Фокусное расстояние линз *1* и *2*, сложенных вместе, равно $-f'$, фокусное расстояние линз *2* и *3* равно $-f''$. Определить фокусное расстояние каждой из линз. $\left[f_1=f'',\ f_2=\frac{f'f''}{f'+f''},\ f_3=f'\right]$

Рис. 91

5.31. Двояковыпуклая линза из стекла $(n=1{,}5)$ обладает оптической силой $\Phi=4$ дптр. При ее погружении в жидкость $(n_1=1{,}7)$ линза действует как рассеивающая. Определить: 1) оптическую силу линзы в жидкости; 2) фокусное расстояние линзы в жидкости; 3) положение изображения точки, находящейся на главной оптической оси на расстоянии трех фокусов от линзы ($a=3f$) для собирающей линзы и рассеивающей линзы. Построить изображение точки для обоих случаев. [1) —0,941 дптр; 2) —1,06 м; 3) 37,5 см, 44 см]

5.32. Доказать, что освещенность, создаваемая изотропным (сила света источника не зависит от направления) точечным источником света I на бесконечно малой площадке, удаленной на расстояние r от источника, равна $E=I\cos i/r^2$, где i — угол падения луча на площадку.

5.33. На какую высоту над чертежной доской необходимо повесить лампочку мощностью $P=300$ Вт, чтобы освещенность доски под лампочкой была равна $E=60$ лк. Наклон доски составляет 30°, а световая отдача лампочки равна 15 лм/Вт. Принять, что полный световой поток, испускаемый изотропным точечным источником света, $\Phi_0=4\pi I$. [2,27 м]

5.34. Линза позволяет при последовательном применении получить два изображения одного и того же предмета, причем увеличения оказываются равными $\eta_1=5$ и $\eta_2=2$. Определить, как при этом меняется освещенность изображений. [$E_1/E_2=1/4$]

5.35. Светильник в виде равномерно светящегося шара радиусом $R=10$ см имеет силу света $I=100$ кд. Определить для этого светильника: 1) полный световой поток Φ_0; 2) светимость R (см. задачу 5.33). [1) 1,26 клм; 2) 10 клм/м^2]

5.36. Отверстие в корпусе фонаря закрыто идеальным матовым стеклом (т. е. яркость источника не зависит от направления) размером 7,5×10 см. Сила света I фонаря в направлении, составляющем угол $\varphi=30°$, равна 12 кд. Определить яркость B стекла. [1,85 ккд/м^2]

5.37. Доказать, что в том случае, когда яркость источника не зависит от направления, светимость R и яркость B связаны соотношением $R=\pi B$.

5.38. На лист белой бумаги размером 10×25 см нормально к поверхности падает световой поток $\Phi=50$ лм. Принимая коэффициент рассеяния бумажного листа $\rho=0{,}7$, определить для него: 1) освещенность; 2) светимость; 3) яркость (см. задачу 5.37). [1) 2 клк; 2) 1,4 клм/м^2; 3) 446 кд/м^2]

5.39. Объяснить, чем отличаются просвечивающие и отражательные электронные микроскопы.

5.40. Объяснить, почему в электронно-оптических преобразователях можно получить увеличенное изображение предмета большей интенсивности, чем интенсивность самого предмета.

5.2. Интерференция света

Основные законы и формулы

- Скорость света в среде

$$v=c/n,$$

где c — скорость света в вакууме; n — абсолютный показатель преломления среды.

- Разность фаз двух когерентных волн

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda_0}(L_2-L_1)=\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta,$$

где $L=sn$ — оптическая длина пути (s — геометрическая длина пути световой волны в среде; n — показатель преломления этой среды); $\Delta=L_2-L_1$ — оптическая разность хода двух световых волн; λ_0 — длина волны в вакууме.

- Условие интерференционных максимумов

$$\Delta=\pm m\lambda_0 \quad (m=0, 1, 2, ...).$$

- Условие интерференционных минимумов

$$\Delta=\pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m=0, 1, 2, ...).$$

- Ширина интерференционной полосы

$$\Delta x=\frac{l}{d}\lambda_0,$$

где d — расстояние между двумя когерентными источниками, находящимися на расстоянии l от экрана, параллельного обоим источникам, при условии $l\gg d$.

- Условия максимумов и минимумов при интерференции света, отраженного от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пленки, находящейся в воздухе ($n_0=1$),

$$2dn\cos r\pm\frac{\lambda_0}{2}=2d\sqrt{n^2-\sin^2 i}\pm\frac{\lambda_0}{2}=m\lambda_0 \quad (m=0, 1, 2,...),$$

$$2dn\cos r\pm\frac{\lambda_0}{2}=2d\sqrt{n^2-\sin^2 i}\pm\frac{\lambda_0}{2}=(2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m=0, 1, 2, ..),$$

где d — толщина пленки; n — ее показатель преломления; i — угол падения; r — угол преломления. В общем случае член $\pm\lambda_0/2$ обусловлен потерей полуволны при отражении света от границы раздела: если $n>n_0$, то необходимо употреблять знак плюс, если $n<n_0$ — знак минус.

● Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем свете)

$$r_m=\sqrt{(m-1/2)\lambda_0 R} \quad (m=1, 2, 3, \ldots),$$

где m — номер кольца; R — радиус кривизны линзы.

● Радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете (или светлых в проходящем свете)

$$r_m^*=\sqrt{m\lambda_0 R} \quad (m=0, 1, 2, \ldots).$$

● В случае «просветления оптики» интерферирующие лучи в отраженном свете гасят друг друга при условии

$$n=\sqrt{n_c},$$

где n_c — показатель преломления стекла; n — показатель преломления пленки.

Примеры решения задач

Задача 3. На экране наблюдается интерференционная картина в результате наложения лучей от двух когерентных источников ($\lambda=500$ нм). На пути одного из лучей перпендикулярно ему поместили стеклянную пластинку ($n=1{,}6$) толщиной $d=5$ мкм. Определить, на сколько полос сместится при этом интерференционная картина.

Дано: $\lambda=500$ нм $=5\cdot10^{-7}$ м, $n=1{,}6$, $d=5$ мкм $=5\cdot10^{-6}$ м.

Определить m.

Решение. При внесении стеклянной пластинки оптическая разность хода между лучами изменится на $\Delta=nd-d=d(n-1)$, где d — толщина пластинки; n — ее показатель преломления.

С другой стороны, внесение пластинки приведет к смещению интерференционной картины на m полос, т. е. дополнительная разность хода равна $m\lambda$. Следовательно,

$$d(n-1)=m\lambda,$$

откуда найдем искомое m:

$$m=d(n-1)/\lambda.$$

Вычисляя, получим $m=6$.

Задача 4. На стеклянный клин ($n=1{,}5$) с преломляющим углом $\alpha=40''$ нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda=600$ нм. Определить в интерференционной

картине расстояние между двумя соседними минимумами.

Дано: $n=1{,}5$, $\alpha=40''=1{,}94\cdot10^{-4}$ рад, $\lambda=600$ нм $=6\cdot10^{-7}$ м.

Определить b.

Решение. Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается от его верхней и нижней грани (рис. 92). Так как угол клина мал, то отраженные лучи *1* и *2* практически параллельны. Отраженные лучи когерентны и на поверхности клина будут наблюдаться интерференционные полосы.

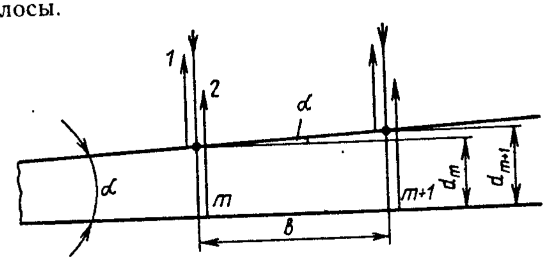


Рис. 92

Условие минимума для клина в общем случае

$$2dn\cos r+\lambda/2=(2m+1)\lambda/2 \quad (m=0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где d — толщина клина в месте темной полосы, соответствующей номеру m; r — угол преломления, $\lambda/2$ — дополнительная разность хода, обусловленная отражением световой волны *1* от оптически более плотной среды.

Угол падения, согласно условию, равен нулю; следовательно, $r=0$. Тогда условие (1) запишется в виде

$$2dn=m\lambda,$$

откуда $d=m\lambda/(2n)$.

Из рисунка следует, что

$$\sin\alpha=(d_{m+1}-d_m)/b. \tag{2}$$

Однако из-за малости угла $\sin\alpha\approx\alpha$, поэтому, подставив в формулу (2) толщины d_{m+1} и d_m, получим

$$\alpha=\frac{(m+1)\lambda-m\lambda}{2bn}=\frac{\lambda}{2bn},$$

откуда найдем искомое расстояние между двумя соседними минимумами:

$$b=\lambda/(2n\alpha)$$

(α здесь выражается в радианах).

Вычисляя, получим $b=1{,}03$ мм.

Задача 5. Плосковыпуклая линза ($n=1,6$) выпуклой стороной прижата к стеклянной пластинке. Расстояние между первыми двумя кольцами Ньютона, наблюдаемыми в отраженном свете, равно 0,5 мм. Определить оптическую силу линзы, если освещение производится монохроматическим светом с $\lambda=550$ нм, падающим нормально.

Дано: $n=1,6$, $r_2-r_1=0,5$ мм $=0,5\cdot10^{-3}$ м, $\lambda = 550$ нм $=5,5\cdot10^{-7}$ м.

Определить Φ.

Решение. Оптическая сила линзы в общем случае

$$\Phi=(N-1)(1/R_1+1/R_2),$$

где $N=n/n_1$ — относительный показатель преломления (n и n_1 — соответственно показатели преломления линзы и окружающей среды); R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхностей линзы.

Поскольку линза — плосковыпуклая и находится в воздухе, для нее оптическая сила

$$\Phi=(n-1)/R. \qquad (1)$$

Для определения радиуса линзы воспользуемся выражением для радиуса темного кольца Ньютона в отраженном свете:

$$r_m=\sqrt{m\lambda R} \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Разность радиусов первых двух темных колец

$$r_2-r_1=\sqrt{R}(\sqrt{2\lambda}-\sqrt{\lambda}),$$

откуда

$$R=\frac{(r_2-r_1)^2}{(\sqrt{2}-1)\lambda}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем искомую оптическую силу линзы:

$$\Phi=(n-1)\frac{\lambda(\sqrt{2}-1)}{(r_2-r_1)^2}.$$

Вычисляя, получим $\Phi=0,547$ дптр.

Задачи

5.41. Определить длину отрезка l_1, на котором укладывается столько же длин волн монохроматического света в вакууме, сколько их укладывается на отрезке $l_2=5$ мм в стекле. Показатель преломления стекла $n_2=1,5$. [7,5 мм]

5.42. Два параллельных световых пучка, отстоящих друг от друга на расстоянии $d=5$ см, падают на кварцевую призму ($n=1,49$) с преломляющим углом $\alpha=25°$ (рис. 93). Определить оптическую разность хода Δ этих пучков после преломления их призмой. [3,47 см]

5.43. В опыте Юнга расстояние между щелями $d=1$ мм, а расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Определить: 1) положение первой светлой полосы; 2) положение третьей темной полосы, если щели освещать монохроматическим светом с длиной волны $\lambda=0,5$ мкм. [1) $\pm1,5$ мм; 2) $\pm5,25$ мм]

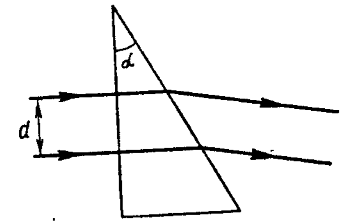


Рис. 93

5.44. В опыте с зеркалами Френеля расстояние d между мнимыми изображениями источника света равно 0,5 мм, расстояние l от них до экрана равно 5 м. В желтом свете ширина интерференционных полос равна 6 мм. Определить длину волны желтого света. [0,6 мкм]

5.45. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга $d = 0,5$ мм ($\lambda=0,6$ мкм). Определить расстояние l от щелей до экрана, если ширина Δx интерференционных полос равна 1,2 мм. [1 м]

5.46. В опыте Юнга расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Определить угловое расстояние между соседними светлыми полосами, если третья светлая полоса на экране отстоит от центра интерференционной картины на расстоянии 4,5 мм. [$5\cdot10^{-4}$ рад]

5.47. Если в опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей поместить перпендикулярно этому лучу тонкую стеклянную пластинку ($n=1,5$), то центральная светлая полоса смещается в положение, первоначально занимаемое пятой светлой полосой. Длина волны $\lambda=0,5$ мкм. Определить толщину пластинки. [5 мкм]

5.48. Определить, во сколько раз изменится ширина интерференционных полос на экране в опыте с зеркалами Френеля, если фиолетовый светофильтр (0,4 мкм) заменить красным (0,7 мкм). [Увеличится в 1,75 раза]

5.49. Расстояние от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана соответственно равны $a = 30$ см и $b = 1,5$ м. Бипризма стеклянная ($n = 1,5$) с преломляющим углом $\vartheta = 20'$. Определить длину волны света, если ширина интерференционных полос $\Delta x = 0,65$ мм. [0,63 мкм]

5.50. Расстояния от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана соответственно равны $a = 48$ см и $b = 6$ м. Бипризма стеклянная ($n = 1,5$) с преломляющим углом $\vartheta = 10'$. Определить максимальное число полос, наблюдаемых на экране, если $\lambda = 600$ мм. [6]

5.51. На плоскопараллельную пленку с показателем преломления $n = 1,33$ под углом $i = 45°$ падает параллельный пучок белого света. Определить, при какой наименьшей толщине пленки зеркально отраженный свет наиболее сильно окрасится в желтый свет ($\lambda = 0,6$ мкм). [133 нм]

5.52. На стеклянный клин ($n = 1,5$) нормально падает монохроматический свет ($\lambda = 698$ нм). Определить угол между поверхностями клина, если расстояние между двумя соседними интерференционными минимумами в отраженном свете равно 2 мм. [24″]

5.53. На стеклянный клин ($n = 1,5$) нормально падает монохроматический свет. Угол клина равен 4′. Определить длину световой волны, если расстояние между двумя соседними интерференционными максимумами в отраженном свете равно 0,2 мм. [698 нм]

5.54. На тонкую мыльную пленку ($n = 1,33$) под углом $i = 30°$ падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм. Определить угол между поверхностями пленки, если расстояние b между интерференционными полосами в отраженном свете равно 4 мм. [12,5″]

5.55. Монохроматический свет падает нормально на поверхность воздушного клина, причем расстояние между интерференционными полосами $\Delta x_1 = 0,4$ мм. Определить расстояние Δx_2 между интерференционными полосами, если пространство между пластинками, образующими клин, заполнить прозрачной жидкостью с показателем преломления $n = 1,33$. [0,3 мм]

5.56. Плосковыпуклая линза радиусом кривизны 4 м выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Определить длину волны падающего монохроматического света, если радиус пятого светлого кольца в отраженном свете равен 3 мм. [0,5 мкм]

5.57. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм, падающим нормально. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью, и наблюдение ведется в проходящем свете. Радиус кривизны линзы $R = 4$ м. Определить показатель преломления жидкости, если радиус второго светлого кольца $r = 1,8$ мм. [1,48]

5.58. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм, падающим нормально. Определить толщину воздушного зазора, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой в том месте, где в отраженном свете наблюдается четвертое темное кольцо. [1,1 мкм]

5.59. Плосковыпуклая линза с показателем преломления $n = 1,6$ выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Радиус третьего светлого кольца в отраженном свете ($\lambda = 0,6$ мкм) равен 0,9 мм. Определить фокусное расстояние линзы. [0,9 м]

5.60. Плосковыпуклая линза с радиусом сферической поверхности $R = 12,5$ см прижата к стеклянной пластинке. Диаметры десятого и пятнадцатого темных колец Ньютона в отраженном свете соответственно равны 1 и 1,5 мм. Определить длину волны света. [0,5 мкм]

5.61. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим нормально. При заполнении пространства между линзой и стеклянной пластинкой прозрачной жидкостью радиусы темных колец в отраженном свете уменьшились в 1,21 раза. Определить показатель преломления жидкости. [1,46]

5.62. Для уменьшения потерь света из-за отражения от поверхностей стекла осуществляют «просветление оптики»: на свободные поверхности линз наносят тонкие пленки с показателем преломления $n = \sqrt{n_c}$. В этом случае амплитуды отраженных лучей от обеих поверхностей такой пленки одинаковы. Определить толщину слоя, при которой отражение для света с длиной волны λ от стекла в направлении нормали равна нулю. [$d = (2m+1)\lambda/(4\sqrt{n_c})$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$)]

5.63. На линзу с показателем преломления $n = 1,58$ нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм. Для устранения потерь света в результате отражения на линзу наносится тонкая пленка. Определить: 1) оптимальный коэффициент поглощения для пленки; 2) толщину пленки. [1) 1,26; 2) 109 нм]

5.64. Определить длину волны света в опыте с интерферометром Майкельсона, если для смещения интерференционной картины на 112 полос зеркало пришлось переместить на расстояние $l = 33$ мкм. [589 нм]

5.65. Для измерения показателя преломления аммиака в одно из плеч интерферометра Майкельсона помещена закрытая с обеих сторон откачанная до высокого вакуума стеклянная трубка длиной $l = 15$ см. При заполнении трубки аммиаком интерференционная картина для длины волны $\lambda = 589$ нм сместилась на 192 полосы. Определить показатель преломления аммиака. [1,000377]

5.66. На рис. 94 показана схема интерференционного рефрактометра, применяемого для измерения показателя преломления прозрачных веществ. S — узкая щель, освещаемая монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 589$ нм; *1* и *2* — кюветы длиной $l = 10$ см, которые заполнены воздухом ($n_0 = 1{,}000277$). При замене в одной из кювет воздуха на аммиак интерференционная картина на экране сместилась на $m_0 = 17$ полос. Определить показатель преломления аммиака. [1,000377]

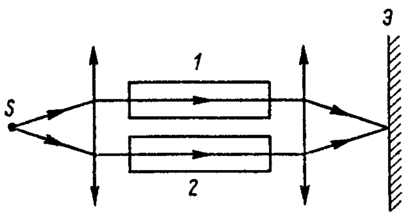


Рис. 94

5.67. На пути лучей интерференционного рефрактометра помещаются трубки длиной $l = 2$ см с плоскопараллельными стеклянными основаниями, наполненные воздухом ($n_0 = 1{,}000277$). Одну трубку заполнили хлором, и при этом интерференционная картина сместилась на $m_0 = 20$ полос. Определить показатель преломления хлора, если наблюдения производятся с монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 589$ нм. [1,000866]

5.3. Дифракция света

Основные законы и формулы

- Радиус внешней границы m-й зоны Френеля для сферической волны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda},$$

где m — номер зоны Френеля; λ — длина волны, a и b — соответственно расстояния диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника и от экрана, на котором дифракционная картина наблюдается.

- Условия дифракционных максимумов и минимумов от одной щели, на которую свет падает нормально:

$$a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad a\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots),$$

где a — ширина щели; φ — угол дифракции; m — порядок спектра; λ — длина волны.

- Условия главных максимумов и дополнительных минимумов дифракционной решетки, на которую свет падает нормально:

$$d\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$d\sin\varphi = \pm m'\frac{\lambda}{N} \quad (m' = 1, 2, 3, \ldots, \text{ кроме } 0, N, 2N, \ldots),$$

где d — период дифракционной решетки; N — число штрихов решетки.

- Период дифракционной решетки

$$d = 1/N_0,$$

где N_0 — число щелей, приходящихся на единицу длины решетки.

- Условие дифракционных максимумов от пространственной решетки (формула Вульфа—Брэггов)

$$2d\sin\vartheta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

где d — расстояние между атомными плоскостями кристалла; ϑ — угол скольжения.

- Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}.$$

- Наименьшее угловое расстояние между двумя светлыми точками, при котором изображения этих точек могут быть разрешены в фокальной плоскости объектива,

$$\varphi \geqslant 1{,}22\lambda/D,$$

где D — диаметр объектива; λ — длина волны света.

- Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN,$$

где λ, $(\lambda + \delta\lambda)$ — длины волн двух соседних спектральных линий, разрешаемых решеткой; m — порядок спектра; N — общее число штрихов решетки.

Примеры решения задач

Задача 6. Посередине между точечным источником монохроматического света $\lambda = 550$ нм и экраном находится диафрагма с круглым отверстием. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии 5 м от источника. Определить радиус отверстия, при котором центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным.

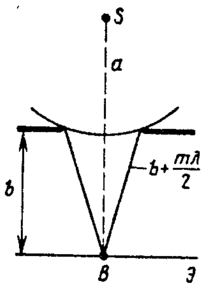


Рис. 95

Дано: $a = b = 2{,}5$ м, $\lambda = 550$ нм $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м.

Определить r.

Решение. Пусть отверстие диафрагмы открывает (рис. 95) m зон Френеля. Тогда радиус m-й зоны Френеля есть не что иное, как радиус отверстия, равный

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda},$$

где m — номер зоны Френеля; λ — длина волны; a и b — соответственно расстояния диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника и от экрана, на котором наблюдается дифракционная картина.

Центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным, если в отверстии укладываются две зоны Френеля, т. е. $m = 2$. Следовательно, искомый радиус отверстия

$$r = \sqrt{\frac{2ab}{a+b}\lambda}.$$

Вычисляя, получим $r = 1{,}17$ мм.

Задача 7. На щель шириной $a = 0{,}1$ мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Дифракционная картина проецируется на экран, параллельный плоскости щели, с помощью линзы, расположенной вблизи щели. Определить расстояние от экрана до линзы, если расстояние l между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны центрального максимума, равно 1 см

Дано: $a = 0{,}1$ мм $= 10^{-4}$ м, $\lambda = 500$ нм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м, $l = 1$ см $= 10^{-2}$ м, $m = 1$.

Определить L.

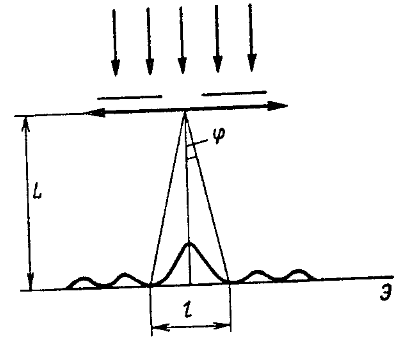


Рис. 96

Решение. Условие дифракционных минимумов от одной щели, на которую свет падает нормально,

$$a \sin\varphi = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, \ldots), \qquad (1)$$

где, по условию задачи, $m = 1$. Из рис. 96 следует, что $l = 2L \operatorname{tg}\varphi$, но так как $l/2 \ll L$, то $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi$, поэтому $l = 2L \sin\varphi$, откуда $\sin\varphi = l/(2L)$.

Подставив эти значения в формулу (1), получим искомое расстояние от экрана до линзы:

$$L = al/(2\lambda).$$

Вычисляя, получим $L = 1$ м.

Задача 8. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. На экран, находящийся от решетки на расстоянии $L = 1$ м, с помощью линзы, расположенной вблизи решетки, проецируется дифракционная картина, причем первый главный максимум наблюдается на расстоянии $l = 12$ см от центрального. Определить: 1) период дифракционной решетки; 2) число штрихов на 1 см ее длины; 3) общее число максимумов, даваемых решеткой; 4) угол дифракции, соответствующий последнему максимуму.

Дано: $\lambda = 550$ нм $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м, $L = 1$ м, $m = 1$, $l = 12$ см $= 0{,}12$ м, $l' = 1$ см $= 0{,}01$ м.

Определить: 1) d; 2) n; 3) N; 4) φ_{max}.

Решение. Период дифракционной решетки найдем из условия главного максимума

$$d \sin\varphi = m\lambda, \qquad (1)$$

где m — порядок спектра (по условию задачи, $m = 1$).

Из рис. 97 следует, что $\operatorname{tg}\varphi = l/L$. Так как $l \ll L$, то $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi$. Тогда выражение (1) можно записать в виде

$$dl/L = m\lambda,$$

откуда

$$d = m\lambda L/l.$$

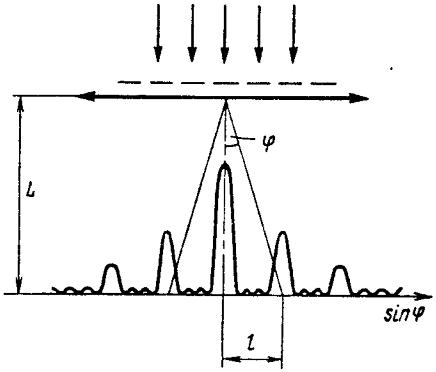


Рис. 97

Число штрихов на $l' = 1$ см

$$n = l'/d.$$

Поскольку наибольший угол отклонения лучей решеткой не может быть более $\pi/2$, из условия (1) можно найти максимальное значение

$$m_{\max} \leqslant d/\lambda$$

(приняли $\sin\varphi_{\max} = 1$). Естественно, что число m должно быть целым. Общее число максимумов, даваемых дифракционной решеткой,

$$N = 2m_{\max} + 1,$$

так как максимумы наблюдаются как справа, так и слева от центрального максимума (единица учитывает центральный максимум).

Угол дифракции, соответствующий последнему максимуму, найдем, записав условие (1) в виде

$$d\sin\varphi_{\max} = m_{\max}\lambda,$$

откуда

$$\varphi_{\max} = \arcsin\frac{m_{\max}\lambda}{d}.$$

Вычисляя, получим: 1) $d = 4{,}58$ мкм; 2) $n = 2{,}18\cdot10^3$ см$^{-1}$; 3) $N = 17$; 4) $\varphi_{\max} = 73{,}9°$.

Задача 9. Дифракционная решетка длиной $l = 5$ мм может разрешить в первом порядке две спектральные линии натрия ($\lambda_1 = 589{,}0$ нм и $\lambda_2 = 589{,}6$ нм). Определить, под каким углом в спектре третьего порядка будет наблюдаться свет с $\lambda_3 = 600$ нм, падающий на решетку нормально.

Дано: $l = 5$ мм $= 5\cdot10^{-3}$ м, $\lambda_1 = 589{,}0$ нм $= 5{,}890\cdot10^{-7}$ м, $\lambda_2 = 589{,}6$ нм $= 5{,}896\cdot10^{-7}$ м, $\lambda_3 = 600$ нм $= 6\cdot10^{-7}$ м, $m_1 = 1$, $m_3 = 3$.

Определить φ.

Решение. Для нахождения искомого угла запишем условие дифракционного максимума

$$d\sin\varphi = m_3\lambda_3,$$

откуда

$$\sin\varphi = m_3\lambda_3/d. \tag{1}$$

Период дифракционной решетки $d = l/N$, где N — общее число штрихов дифракционной решетки. Найдем N из формулы для разрешающей способности дифракционной решетки:

$$R = m_1N = \lambda_1/\Delta\lambda,$$

где $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Тогда $N = \lambda_1/(m_1\Delta\lambda)$ и

$$d = m_1 l\Delta\lambda/\lambda_1. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), найдем искомый угол:

$$\varphi = \arcsin\frac{m_3\lambda_1\lambda_3}{m_1 l\Delta\lambda}.$$

Вычисляя, получим $\varphi = 20°42'$.

Задачи

5.68. Точечный источник света ($\lambda = 0{,}5$ мкм) расположен на расстоянии $a = 1$ м перед диафрагмой с круглым отверстием диаметра $d = 2$ мм. Определить расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения, если отверстие открывает три зоны Френеля. [2 м]

5.69. Определить радиус третьей зоны Френеля, если расстояния от точечного источника света ($\lambda = 0{,}6$ мкм) до волновой поверхности и от волновой поверхности до точки наблюдения равны 1,5 м. [1,16 мм]

5.70. На диафрагму с круглым отверстием диаметром $d = 5$ мм падает нормально параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Определить расстояние от точки наблюдения до отверстия, если отверстие открывает: 1) две зоны Френеля; 2) три зоны Френеля. [1) 5,21 м; 2) 3,47 м]

5.71. Определить радиус третьей зоны Френеля для случая плоской волны. Расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения равно 1,5 м. Длина волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. [1,64 мм]

5.72. Определить радиус четвертой зоны Френеля, если радиус второй зоны Френеля для плоского волнового фронта равен 2 мм. [2,83 мм]

5.73. Определить радиус первой зоны Френеля, если расстояния от точечного источника света ($\lambda = 0{,}5$ мкм) до зонной пластинки и от пластинки до места наблюдения $a = b = 1$ м. [0,5 мм]

5.74. На зонную пластинку падает плоская монохроматическая волна ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Определить радиус первой зоны Френеля, если расстояние от зонной пластинки до места наблюдения $b = 1$ м. [707 мкм]

5.75. Зонная пластинка дает изображение источника, удаленного от нее на 2 м, на расстоянии 1 м от своей поверхности. Где получится изображение источника, если его удалить в бесконечность? [66,7 см]

5.76. Дифракция наблюдается на расстоянии 1 м от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Посередине между источником света и экраном находится диафрагма с круглым отверстием. Определить радиус отверстия, при котором центр дифракционных колец на экране является наиболее темным. [0,5 мм]

5.77 Сферическая волна, распространяющаяся из точечного монохроматического источника света ($\lambda = 0{,}6$ мкм), встречает на своем пути экран с круглым отверстием радиусом $r = 0{,}4$ мм. Расстояние a от источника до экрана равно 1 м. Определить расстояние от отверстия до точки экрана, лежащей на линии, соединяющей источник с центром отверстия, где наблюдается максимум освещенности. [36,3 см]

5.78. На экран с круглым отверстием радиусом $r = 1{,}5$ мм нормально падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Точка наблюдения находится на оси отверстия на расстоянии $b = 1{,}5$ м от него. Определить: 1) число зон Френеля, укладывающихся в отверстии; 2) темное или светлое кольцо наблюдается в центре дифракционной картины, если в месте наблюдения помещен экран. [1) 3; 2) светлое]

5.79. На экран с круглым отверстием радиусом $r = 1{,}2$ мм нормально падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Определить

максимальное расстояние от отверстия на его оси, где еще можно наблюдать наиболее темное пятно. [1,2 м]

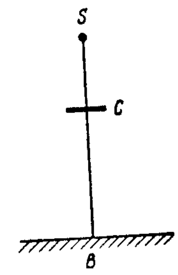


Рис. 98

5.80. Показать, что за круглым экраном C в точке B, лежащей на линии, соединяющей точечный источник с центром экрана (рис. 98), будет наблюдаться светлое пятно. Размеры экрана принять достаточно малыми.

5.81. Дифракция наблюдается на расстоянии l от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Посередине между источником света и экраном находится непрозрачный диск диаметром 5 мм. Определить расстояние l, если диск закрывает только центральную зону Френеля. [50 м]

5.82. На узкую щель шириной $a = 0{,}05$ мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 694$ нм. Определить направление света на вторую светлую дифракционную полосу (по отношению к первоначальному направлению света). [2°]

5.83. На узкую щель падает нормально монохроматический свет. Его направление на четвертую темную дифракционную полосу составляет 2°12′. Определить, сколько длин волн укладывается на ширине щели. [104]

5.84. На щель шириной $a = 0{,}1$ мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Экран, на котором наблюдается дифракционная картина, расположен параллельно щели на расстоянии $l = 1$ м. Определить расстояние b между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны центрального фраунгоферова максимума [1,2 см]

5.85. На щель шириной $a = 0{,}1$ мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном параллельно щели. Определить расстояние l от щели до экрана, если ширина центрального дифракционного максимума $b = 1$ см. [1 м]

5.86. Монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм падает на длинную прямоугольную щель шириной $a = 12$ мкм под углом $\alpha_0 = 45°$ к ее нормали. Определить угловое положение первых минимумов, расположенных по обе стороны центрального фраунгоферова максимума. [49°12′, 41°6′]

5.87. Монохроматический свет падает на длинную прямоугольную щель шириной $a = 12$ мкм под углом $\alpha = 30°$ к ее нормали. Определить длину волны λ света, если направление на первый минимум ($m=1$) от центрального фраунгоферова максимума составляет 33°. [536 нм]

5.88. На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определить наибольший порядок спектра, полученный с помощью этой решетки, если ее постоянная $d = 2$ мкм. [3]

5.89. На дифракционную решетку длиной $l = 1{,}5$ мм, содержащей $N = 3000$ штрихов, падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определить: 1) число максимумов, наблюдаемых в спектре дифракционной решетки; 2) угол, соответствующий последнему максимуму. [1) 18; 2) 81°54′]

5.90. Определить число штрихов на 1 мм дифракционной решетки, если углу $\varphi = 30°$ соответствует максимум четвертого порядка для монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. [250 мм$^{-1}$]

5.91. На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. На экран, находящийся от решетки на расстоянии $L = 1$ м, с помощью линзы, расположенной вблизи решетки, проецируется дифракционная картина, причем первый главный максимум наблюдается на расстоянии $l = 15$ см от центрального. Определить число штрихов на 1 см дифракционной решетки. [$3 \cdot 10^3$ см$^{-1}$]

5.92. Монохроматический свет нормально падает на дифракционную решетку. Определить угол дифракции, соответствующий максимуму четвертого порядка, если максимум третьего порядка отклонен на $\varphi_1 = 18°$. [24°20′]

5.93. На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет. Определить угол дифракции для линии 0,55 мкм в четвертом порядке, если этот угол для линии 0,6 мкм в третьем порядке составляет 30°. [37°42′]

5.94. На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет. В спектре, полученном с помощью этой дифракционной решетки, некоторая спектральная линия наблюдается в первом порядке под углом $\varphi = 11°$. Определить наивысший порядок спектра, в котором может наблюдаться эта линия. [5]

5.95. Определить длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решетку, имеющую 300 штрихов на 1 мм, если угол между направлениями на максимумы первого и второго порядков составляет 12°. [644 нм]

5.96. Определить толщину плоскопараллельной стеклянной пластинки ($n = 1{,}55$), при которой в отраженном свете максимум второго порядка для $\lambda = 0{,}65$ мкм наблюдается под тем же углом, что и у дифракционной решетки с постоянной $d = 1$ мкм. [577 нм]

5.97. На дифракционную решетку с постоянной $d = 5$ мкм под углом $\vartheta = 30°$ падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Определить угол φ дифракции для главного максимума третьего порядка. [53°8′]

5.98. На дифракционную решетку под углом ϑ падает монохроматический свет с длиной волны λ. Найти условие, определяющее направления на главные максимумы, при условии, что $d \gg m\lambda$ (m — порядок спектра). [$d \cos\vartheta\ (\varphi - \vartheta) \approx m\lambda$]

5.99. Узкий параллельный пучок рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 245$ пм падает на естественную грань монокристалла каменной соли. Определить расстояние d между атомными плоскостями монокристалла, если дифракционный максимум второго порядка наблюдается при падении излучения к поверхности монокристалла под углом скольжения $\vartheta = 61°$. [0,28 нм]

5.100. Узкий параллельный пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на грань кристалла с расстоянием d между его атомными плоскостями 0,3 нм. Определить длину волны рентгеновского излучения, если под углом $\vartheta = 30°$ к плоскости грани наблюдается дифракционный максимум первого порядка. [300 пм]

5.101. Узкий пучок рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 245$ пм падает под некоторым углом скольжения на естественную грань монокристалла NaCl ($M = 58{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль), плотность которого $\rho = 2{,}16$ г/см^3. Определить угол скольжения, если при зеркальном отражении от этой грани наблюдается максимум второго порядка. [60°18′]

5.102. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает под углом скольжения $\vartheta = 60°$ на естественную грань монокристалла NaCl ($M = 58{,}5 \times 10^{-3}$ кг/моль), плотность которого $\rho = 2{,}16$ г/см^3.

Определить длину волны излучения, если при зеркальном отражении от этой грани наблюдается максимум третьего порядка. [163 пм]

5.103. Диаметр D объектива телескопа равен 10 см. Определить наименьшее угловое расстояние φ между двумя звездами, при котором в фокальной плоскости объектива получатся их разрешимые дифракционные изображения. Считать, что длина волны света $\lambda = 0{,}55$ мкм. [1,4″]

5.104. Определить наименьшее угловое разрешение радиоинтерферометра, установленного на Земле, при работе на длине волны $\lambda = 10$ м. [0,2″]

5.105. На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Угол дифракции для пятого максимума равен 30°, а минимальная разрешаемая решеткой разность длин волн составляет $\delta\lambda = 0{,}2$ нм. Определить: 1) постоянную дифракционной решетки; 2) длину дифракционной решетки. [1) 6 мкм; 2) 3,6 мм]

5.106. Сравнить наибольшую разрешающую способность для красной линии кадмия ($\lambda = 644$ нм) двух дифракционных решеток одинаковой длины ($l = 5$ мм), но разных периодов ($d_1 = 4$ мкм, $d_2 = 8$ мкм). [$R_{1\max} = R_{2\max} = 7500$]

5.107. Показать, что для данной λ максимальная разрешающая способность дифракционных решеток, имеющих разные периоды, но одинаковую длину, имеет одно и то же значение. [$R_{\max} = l/\lambda$]

5.108. Определить постоянную дифракционной решетки, если она в первом порядке разрешает две спектральные линии калия ($\lambda_1 = 578$ нм и $\lambda_2 = 580$ нм). Длина решетки $l = 1$ см. [34,6 мкм]

5.109. Постоянная d дифракционной решетки длиной $l = 2{,}5$ см равна 5 мкм. Определить разность длин волн, разрешаемую этой решеткой, для света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм в спектре второго порядка. [50 пм]

5.110. Дифракционная решетка имеет $N = 1000$ штрихов и постоянную $d = 10$ мкм. Определить: 1) угловую дисперсию для угла дифракции $\varphi = 30°$ в спектре третьего порядка; 2) разрешающую способность дифракционной решетки в спектре пятого порядка. [1) $3{,}46 \times 10^5$ рад/м; 2) 5000]

5.111. Определить длину волны, для которой дифракционная решетка с постоянной $d = 3$ мкм в спектре второго порядка имеет угловую дисперсию $D = 7 \times 10^5$ рад/м. [457 нм]

5.112. Угловая дисперсия дифракционной решетки для $\lambda = 500$ нм в спектре второго порядка равна $4{,}08 \times 10^5$ рад/м. Определить постоянную дифракционной решетки. [5 мкм]

5.4. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

Основные законы и формулы

- Связь угла φ отклонения лучей призмой и преломляющего угла A призмы

$$\varphi = A(n-1),$$

где n — показатель преломления призмы.

- Связь между показателем преломления и диэлектрической проницаемостью вещества

$$n = \sqrt{\varepsilon}.$$

- Уравнение вынужденных колебаний оптического электрона под действием электрической составляющей поля волны (простейшая задача дисперсии)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m}\cos\omega t,$$

где eE_0 — амплитудное значение силы, действующей на электрон со стороны поля волны; ω_0 — собственная частота колебаний электрона; ω — частота внешнего поля; m — масса электрона.

- Зависимость показателя преломления вещества n от частоты ω внешнего поля, согласно элементарной электронной теории дисперсии,

$$n^2 = 1 + \frac{n_{0i}}{\varepsilon_0}\sum \frac{e^2/m}{\omega_{0i}^2 - \omega^2},$$

где ε_0 — электрическая постоянная, n_{0i} — концентрация электронов с собственной частотой ω_{0i}; m — масса электрона; e — заряд электрона́.

- Закон ослабления света в веществе (закон Бугера)

$$I = I_0 e^{-\alpha x},$$

где I_0 и I — интенсивности плоской монохроматической световой волны соответственно на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной x; α — коэффициент поглощения.

- Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c)\cos\vartheta},$$

где ν_0 и ν — соответственно частоты электромагнитного излучения, испускаемого источником и воспринимаемого приемником; v — скорость источника электромагнитного излучения относительно приемника; c — скорость света в вакууме; ϑ — угол между вектором скорости $\mathbf{v}$ и направлением наблюдения, измеряемый в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

● Поперечный эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме ($\vartheta = \pi/2$)

$$\nu = \nu_0\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

● Эффект Вавилова — Черенкова

$$\cos\vartheta = c/(nv),$$

где ϑ — угол между направлением распространения излучения и вектором скорости частицы; n — показатель преломления среды.

Примеры решения задач

Задача 10. Источник монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = 550$ нм движется со скоростью $v = 0{,}2\,c$ по направлению к наблюдателю. Определить длину волны, которую зафиксирует приемник наблюдателя.

Дано: $\lambda_0 = 550$ нм $= 5{,}5\cdot10^{-7}$ м, $v = 0{,}2\,c$, $\vartheta = \pi$.

Определить λ.

Решение. Согласно формуле, описывающей эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме,

$$\nu = \nu_0\sqrt{1 - v^2/c^2}\Big/\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right), \quad (1)$$

где ν_0 и ν — соответственно частоты электромагнитного излучения, испускаемого источником и воспринимаемого приемником; v — скорость источника относительно приемника; ϑ — угол между вектором скорости $\mathbf{v}$ и направлением наблюдения, измеряемый в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

Так как, по условию задачи, $\vartheta = \pi$ ($\cos\vartheta = -1$), а $\nu = c/\lambda$, то выражение (1) можно представить в виде

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}\,\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c},$$

откуда искомая длина волны, фиксируемая приемником наблюдателя,

$$\lambda = \lambda_0\frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}}.$$

Вычисляя, получим $\lambda = 449$ нм.

Задача 11. Определить показатель преломления среды, в которой наблюдается эффект Вавилова — Черенкова, если минимальный импульс электрона составляет $2{,}44\cdot10^{-22}$ кг·м/с.

Дано: $m_0 = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг, $p_{\min} = 2{,}44\cdot10^{-22}$ кг·м/с.

Определить n.

Решение. Эффект Вавилова — Черенкова наблюдается при движении релятивистских заряженных частиц в среде с постоянной скоростью v, превышающей фазовую скорость света в этой среде, т. е. при условии

$$v > c/n. \quad (1)$$

Условие (1), учитывая, что $\beta = v/c$, запишем в виде

$$\beta n > 1. \quad (2)$$

Импульс релятивистской частицы

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

(учли, что $v = \beta c$). Минимальному импульсу соответствует минимальное значение $\beta_{\min} = 1/n$ (см. (2)). Тогда

$$p_{\min} = \frac{m_0 c}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

откуда искомый показатель преломления среды

$$n = \sqrt{\frac{m_0^2c^2}{p_{\min}^2} + 1}.$$

Вычисляя, получим $n = 1{,}5$.

Задачи

5.113. Доказать, что если монохроматический пучок света падает на грань призмы с показателем преломления n под малым углом, то при малом преломляющем угле A призмы угол отклонения φ лучей призмой не зависит от угла падения и равен $A(n-1)$.

5.114. На стеклянную призму с преломляющим углом $A = 55°$ падает луч света под углом $\alpha_1 = 30°$. Определить угол отклонения φ луча призмой, если показатель преломления n стекла равен 1,5. [35°40′]

5.115. На грань стеклянной призмы ($n = 1{,}5$) нормально падает луч света. Определить угол отклонения φ луча призмой, если ее преломляющий угол $A = 30°$. [18°36′]

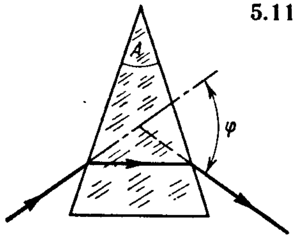


Рис. 99

5.116. На рис. 99 представлен симметричный ход луча в равнобедренной призме с преломляющим углом $A = 40°$ (внутри призмы луч распространяется параллельно основанию). Определить угол отклонения φ луча призмой, если показатель преломления n материала линзы равен 1,75. [33°32′]

5.117. Луч света выходит из стеклянной призмы ($n = 1{,}5$) под тем же углом, что и входит в нее. Определить угол отклонения φ луча призмой, если ее преломляющий угол $A = 60°$. [37°11′]

5.118. Определить максимальную скорость вынужденных колебаний свободного электрона, если в точке его нахождения радиопередатчик, работающий на частоте 500 кГц, создает поле электромагнитного излучения $E_0 = 10$ мВ/см. [55,9 км/с]

5.119. Электромагнитная волна с частотой ω распространяется в разреженной плазме. Концентрация свободных электронов в плазме равна n_0. Определить зависимость диэлектрической проницаемости ε плазмы от частоты ω. Взаимодействием волны с ионами плазмы пренебречь. [$\varepsilon = 1 - n_0e^2/(\varepsilon_0 m\omega^2)$]

5.120. Определить концентрацию свободных электронов ионосферы, если для радиоволн с частотой $\nu = 97$ МГц ее показатель преломления $n = 0{,}91$. [$2{,}01 \cdot 10^7$ см$^{-3}$]

5.121. При прохождении в некотором веществе пути x интенсивность света уменьшилась в 3 раза. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении пути $2x$. [В 9 раз]

5.122. Коэффициент поглощения некоторого вещества для монохроматического света определенной длины волны $\alpha = 0{,}1$ см$^{-1}$. Определить толщину слоя вещества, которая необходима для ослабления света: 1) в 2 раза; 2) в 5 раз. Потери на отражение света не учитывать. [1) 6,93 см; 2) 16,1 см]

5.123. Плоская монохроматическая световая волна распространяется в некоторой среде. Коэффициент поглощения среды для данной длины волны $\alpha = 1{,}2$ м$^{-1}$. Определить, на сколько процентов уменьшится интенсивность света при прохождении данной волной пути: 1) 10 мм; 2) 1 м. [1) на 1,2 %; 2) на 70 %]

5.124. Свет падает нормально поочередно на две пластинки, изготовленные из одного и того же вещества, имеющие соответственно толщины $x_1 = 5$ мм и $x_2 = 10$ мм. Определить коэффициент поглощения этого вещества, если интенсивность прошедшего света через первую пластинку составляет 82 %, а через вторую — 67 %. [0,404 см$^{-1}$]

5.125. Источник монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = 0{,}5$ мкм движется по направлению к наблюдателю со скоростью $0{,}15\,c$ (c — скорость света в вакууме). Определить длину волны, которую зарегистрирует приемник наблюдателя. [430 нм]

5.126. При какой скорости красный свет (690 нм) будет казаться зеленым (530 нм). [77,4 Мм/с]

5.127. В спектральных линиях, излучаемых астрономическими объектами — квазарами, наблюдалось красное смещение, отвечающее трехкратному уменьшению частоты. Определить, с какой скоростью при этом должен был бы удаляться квазар. [0,8 c]

5.128. Известно, что при удалении от нас некоторой туманности линия излучения водорода ($\lambda = 656{,}3$ нм) в ее спектре смещена в красную сторону на $\Delta\lambda = 2{,}5$ нм. Определить скорость удаления туманности. [11,4 Мм/с]

5.129. Вывести выражение для уширения $\Delta\lambda/\lambda$ спектральных линий в случае продольного эффекта Доплера при $v \ll c$. [$\Delta\lambda/\lambda = v/c$]

5.130. Исходя из общей формулы, описывающей эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме, вывести формулу для поперечного эффекта Доплера. Почему поперечный эффект Доплера является чисто релятивистским эффектом?

5.131. Вывести выражение для уширения $\Delta\lambda/\lambda$ спектральных линий в случае поперечного эффекта Доплера. [$\Delta\lambda/\lambda = v^2/(2c^2)$]

5.132. Определить доплеровское смещение $\Delta\lambda$ для спектральной линии атомарного водорода ($\lambda = 486{,}1$ нм), если ее наблюдать под прямым углом к пучку атомов водорода с кинетической энергией $T = 100$ кэВ. [51,7 пм]

5.133. Определить скорость электронов, при которой черенковское излучение происходит в среде с показателем преломления $n = 1{,}54$ под углом $\vartheta = 30°$ к направлению их движения. Скорость выразить в долях скорости света. [0,75 c]

5.134. Определить кинетическую энергию протонов, которые в среде с показателем преломления $n = 1{,}6$ излучают свет под углом $\vartheta = 20°$ к направлению своего движения. Ответ выразить в электрон-вольтах. [0,319 ГэВ]

5.135. Определить минимальный импульс, которым должен обладать электрон, чтобы эффект Вавилова — Черенкова наблюдался в среде с показателем преломления $n = 1{,}5$. [$2{,}44 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с]

5.136. Определить минимальную кинетическую энергию, которой должен обладать электрон, чтобы в среде с показателем преломления $n = 1{,}5$ возникло черенковское излучение. Ответы выразить в МэВ. [0,175 МэВ]

5.137. Определить минимальную ускоряющую разность потенциалов U_{min}, которую должен пройти электрон, чтобы в среде с показателем преломления $n = 1{,}5$ возникло черенковское излучение. [175 кВ]

5.5. Поляризация света

Основные законы и формулы

● Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}},$$

где I_{max} и I_{min} — соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

● Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

где I — интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через анализатор; I_0 — интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; α — угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора.

● Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21},$$

где i_B — угол падения, при котором отраженный от диэлектрика луч является плоскополяризованным; n_{21} — относительный показатель преломления.

● Оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами на пути l в ячейке Керра

$$\Delta = l(n_o - n_e) = klE^2,$$

где n_o, n_e — показатели преломления соответственно обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном оптической оси; E — напряженность электрического поля; k — постоянная.

● Оптическая разность хода для пластинки в четверть волны

$$\Delta = (n_o - n_e)d = \pm(m + 1/4)\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

где знак плюс соответствует отрицательным кристаллам, минус — положительным; λ_0 — длина волны в вакууме.

● Угол поворота плоскости поляризации:
для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей

$$\varphi = \alpha d;$$

для оптически активных растворов

$$\varphi = [\alpha] C d,$$

где d — длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе; $\alpha_0[\alpha]$ — удельное вращение; C — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

Примеры решения задач

Задача 12. Пластинка кварца толщиной $d = 2$ мм (удельное вращение кварца 15 град/мм), вырезанная перпендикулярно оптической оси, помещена между двумя скрещенными николями. Пренебрегая потерями света в николях, определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света, прошедшего эту систему.

Д а н о: $d = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м, $\alpha = 15$ град/мм.

О п р е д е л и т ь I_0/I.

Р е ш е н и е. Естественный свет, проходя через первый николь (рис. 100), вследствие двойного лучепреломления

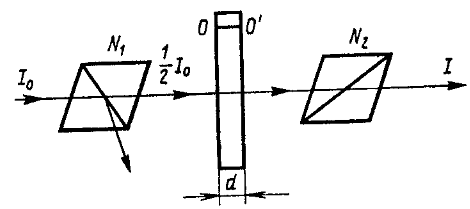


Рис. 100

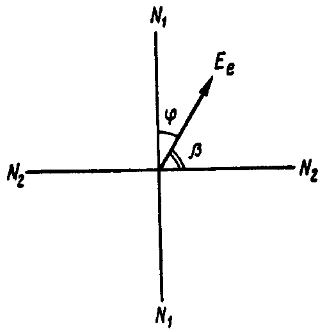


Рис. 101

расщепляется на два пучка: обыкновенный (o) и необыкновенный (e). Оба пучка одинаковы по интенсивности и поляризованы полностью, но во взаимно перпендикулярных плоскостях. Из первого николя выходит необыкновенный (e) луч света с интенсивностью $I_0/2$ (обыкновенный (o) луч претерпевает полное внутреннее отражение).

В кварцевой пластинке наблюдается вращение плоскости поляризации необыкновенного луча на угол

$$\varphi = \alpha d = 30°.$$

Электрический вектор $\mathbf{E}_e$ луча, падающего на николь N_2, после прохождения пластинки (рис. 101) составляет с его направлением пропускания угол

$$\beta = 90° - \varphi = 60°.$$

Согласно закону Малюса, интенсивность прошедшего через николь N_2 света

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2\beta.$$

Следовательно,

$$I_0/I = 2/\cos^2\beta.$$

Вычисляя, получим $I_0/I = 8$.

Задача 13. Пучок естественного света падает на стекло с показателем преломления $n = 1{,}73$. Определить, при каком угле преломления отраженный от стекла пучок света будет полностью поляризован.

Д а н о $n = 1{,}73$.

О п р е д е л и т ь r.

Р е ш е н и е. Свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован, если он падает на диэлектрик под углом Брюстера (рис. 102). Согласно закону Брюстера,

$$\operatorname{tg} i_{\text{B}} = n_{21},$$

где n_{21} — относительный показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (воздуха): $n_{21} = n_2/n_1 = n$ (так как $n_1 = 1$). Тогда

$$i_{\text{B}} = \operatorname{arctg} n = 60°.$$

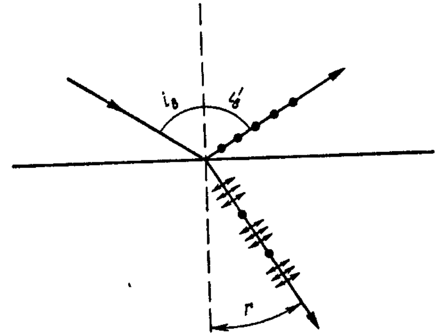


Рис. 102

Если свет падает на границу раздела под углом Брюстера, то отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны ($\operatorname{tg} i_{\text{B}} = \sin i_{\text{B}}/\cos i_{\text{B}}$; $n_{21} = \sin i_{\text{B}}/\sin r$, откуда $\cos i_{\text{B}} = \sin r$). Следовательно, $i_{\text{B}} + r = \pi/2$, но $i'_{\text{B}} = i_{\text{B}}$ (закон отражения), поэтому $i'_{\text{B}} + r = \pi/2$. Тогда искомый угол преломления, при котором отраженный луч полностью поляризован,

$$r = 90° - i_{\text{B}} = 30°.$$

Задача 14. Определить разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей, если наименьшая толщина кристаллической пластинки в четверть волны для $\lambda_0 = 530$ нм составляет 13,3 мкм.

Д а н о: $\lambda_0 = 530$ нм $= 5{,}3 \cdot 10^{-7}$ м, $d_{\min} = 13{,}3$ мкм $= 1{,}33 \times 10^{-5}$ м.

О п р е д е л и т ь $n_o - n_e$.

Р е ш е н и е. Пластинкой в четверть волны называется вырезанная параллельно оптической оси пластинка, для которой оптическая разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e)d = \pm(m + 1/4)\lambda_0 \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

причем знак плюс соответствует отрицательным кристаллам, минус — положительным. При прохождении через эту пластинку в направлении, перпендикулярном оптической оси, обыкновенный и необыкновенный лучи, не изменяя своего направления, приобретают разность хода, равную $\lambda/4$.

Минимальная толщина пластинки в четверть волны соответствует $m = 0$. Тогда

$$d_{\min}(n_o - n_e) = \lambda_0/4,$$

откуда

$$n_o - n_e = \frac{\lambda_0}{4d_{min}}.$$

Вычисляя, получим, что $n_o - n_e = 0{,}01$.

Задачи

5.138. Описать поведение светового вектора **E** в данной точке пространства в случае эллиптически поляризованного света.

5.139. Определить степень поляризации частично поляризованного света, если амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света, в 3 раза больше амплитуды, соответствующей его минимальной интенсивности. [0,5]

5.140. Степень поляризации частично поляризованного света составляет 0,75. Определить отношение максимальной интенсивности света, пропускаемого анализатором, к минимальной. [$I_{max}/I_{min} = 7$]

5.141. Определить степень поляризации P света, который представляет собой смесь естественного света с плоскополяризованным, если интенсивность поляризованного света равна интенсивности естественного. [0,5]

5.142. Определить степень поляризации P света, который представляет собой смесь естественного света с плоскополяризованным, если интенсивность поляризованного света в 5 раз больше интенсивности естественного. [0,833]

5.143. Угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора составляет 30°. Определить изменение интенсивности прошедшего через них света, если угол между главными плоскостями равен 45°. [Уменьшится в 1,5 раза]

5.144. Интенсивность естественного света, прошедшего через два николя, уменьшилась в 8 раз. Пренебрегая поглощением света, определить угол между главными плоскостями николей. [60°]

5.145. Определить, во сколько раз ослабится интенсивность света, прошедшего через два николя, расположенные так, что угол между их главными плоскостями $\alpha = 60°$, а в каждом из николей теряется 8 % интенсивности падающего на него света. [В 9,45 раза]

5.146. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света, прошедшего через два николя, главные плоскости которых образуют угол в 60°, если каждый из николей как поглощает, так и отражает 5 % падающего на них света. [В 9,88 раза]

5.147. Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, угол между главными плоскостями которых равен α. Поляризатор и анализатор как поглощают, так и отражают 10 % падающего на них света. Определить угол α, если интенсивность света, вышедшего из анализатора, равна 12 % интенсивности света, падающего на поляризатор. [56°47′]

5.148. Естественный свет интенсивностью I_0 проходит через поляризатор и анализатор, угол между главными плоскостями которых составляет α. После прохождения света через эту систему он падает на зеркало и, отразившись, проходит вновь через нее. Пренебрегая поглощением света, определить интенсивность I света после его обратного прохождения. [$I = {}^1/_2 I_0 \cos^4\alpha$]

5.149. Доказать, что при падении света на границу раздела двух сред под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.

5.150. Известно, что при падении света на прозрачный диэлектрик под углом Брюстера отраженный свет является плоскополяризованным. Чем необходимо воспользоваться, чтобы получить преломленный свет практически полностью поляризованным?

5.151. Пучок естественного света падает (рис. 103) на стеклянную призму с углом $\alpha = 30°$. Определить показатель преломления стекла, если отраженный луч является плоскополяризованным. [1,73]

5.152. Определить показатель преломления стекла, если при отражении от него света отраженный луч полностью поляризован при угле преломления 35°. [1,43]

5.153. Определить, под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы лучи, отраженные от поверхности озера ($n = 1{,}33$), были максимально поляризованы [36°56′]

5.154. Предельный угол полного отражения для пучка света на границе

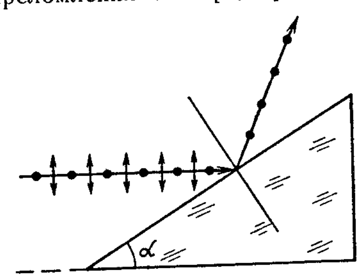


Рис. 103

кристалла каменной соли с воздухом равен 40,5°. Определить угол Брюстера при падении света из воздуха на поверхность этого кристалла. [57°]

5.155. Свет, проходя через жидкость, налитую в стеклянный сосуд ($n = 1,5$), отражается от дна, причем отраженный свет плоскополяризован при падении его на дно сосуда под углом 41°. Определить: 1) показатель преломления жидкости; 2) угол падения света на дно сосуда, чтобы наблюдалось полное отражение. [1) 1,73; 2) 60°7′]

5.156. Параллельный пучок света падает нормально на пластинку из исландского шпата, толщиной 50 мкм, вырезанную параллельно оптической оси. Принимая показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно $n_o = 1,66$ и $n_e = 1,49$, определить разность хода этих лучей, прошедших через пластинку. [8,5 мкм]

5.157. Плоскополяризованный свет, длина волны которого в вакууме $\lambda = 589$ нм, падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно его оптической оси. Принимая показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно $n_o = 1,66$ и $n_e = 1,49$, определить длины волн этих лучей в кристалле. [$\lambda_o = 355$ нм, $\lambda_e = 395$ нм]

5.158. Плоскополяризованный свет, длина волны которого в вакууме $\lambda = 530$ нм, падает на пластинку из кварца перпендикулярно его оптической оси. Определить показатели преломления кварца для обыкновенного (n_o) и необыкновенного (n_e) лучей, если длины волн этих лучей в кристалле соответственно равны $\lambda_0 = 344$ нм и $\lambda_e = 341$ нм. [$n_o = 1,54$, $n_e = 1,55$]

5.159. Определить наименьшую толщину кристаллической пластинки в четверть волны для $\lambda = 530$ нм, если разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей для данной длины волны $n_e - n_0 = 0,01$. Пластинкой в четверть волны называется кристаллическая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, при прохождении через которую в направлении, перпендикулярном оптической оси, обыкновенный и необыкновенный лучи, не изменяя своего направления, приобретают разность хода, равную $\lambda/4$. [13,3 мкм]

5.160. Кристаллическая пластинка из исландского шпата с наименьшей толщиной $d = 0,86$ мкм служит пластинкой в четверть волны (см. задачу 5.159) для $\lambda = 0,59$ мкм. Определить разность Δn показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей. [0,171]

5.161. Используя задачу 5.159, дать определение кристаллической пластинки в полволны и определить ее наименьшую толщину для $\lambda = 530$ нм, если разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей для данной длины волны $n_e - n_o = 0,01$. [26,5 мкм]

5.162. Используя задачу 5.159, дать определение кристаллической пластинки «в целую волну» и определить ее наименьшую толщину для $\lambda = 530$ нм, если разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей для данной длины волны $n_e - n_o = 0,01$. [53 мкм]

5.163. Объяснить, изменится ли наблюдаемая оптическая картина в случае эффекта Керра, если направление электрического поля изменить на противоположное.

5.164. Определить толщину кварцевой пластинки, для которой угол поворота плоскости поляризации монохроматического света определенной длины волны $\varphi = 180°$. Удельное вращение в кварце для данной длины волны $\alpha = 0,52$ рад/мм. [6,04 мм]

5.165. Пластинка кварца толщиной $d_1 = 2$ мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол $\varphi_1 = 30°$. Определить толщину d_2 кварцевой пластинки, помещенной между параллельными николями, чтобы данный монохроматический свет гасился полностью. [6 мм]

5.166. Определить массовую концентрацию C сахарного раствора, если при прохождении света через трубку длиной $l = 20$ см с этим раствором плоскость поляризации света поворачивается на угол $\varphi = 10°$. Удельное вращение $[\alpha]$ сахара равно $1,17 \cdot 10^{-2}$ рад$\cdot$м^2/кг. [74,8 кг/м^3]

5.167. Раствор глюкозы с массовой концентрацией $C_1 = 0,21$ г/см^3, находящийся в стеклянной трубке, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света, проходящего через раствор, на угол $\varphi_1 = 24°$. Определить массовую концентрацию C_2 глюкозы в другом растворе в трубке такой же длины, если он поворачивает плоскость поляризации на угол $\varphi_2 = 18°$. [157 кг/м^3]

5.168. Плоскополяризованный монохроматический свет, прошедший через поляроид, оказывается полностью погашенным Если же на пути света поместить кварцевую пластинку, то интенсивность прошедшего через поляроид света уменьшается в 3 раза (по сравнению с интенсивностью света, падающего на поляроид). Принимая удельное вращение в кварце $\alpha = 0{,}52$ рад/мм и пренебрегая потерями света, определить минимальную толщину кварцевой пластинки. [1,19 мм]

5.6. Квантовая природа излучения

Основные законы и формулы

● Закон Стефана — Больцмана

$$R_e = \sigma T^4,$$

где R_e — энергетическая светимость (излучательность) черного тела, σ — постоянная Стефана — Больцмана, T — термодинамическая температура

● Связь энергетической светимости R_e и спектральной плотности энергетической светимости $r_{\nu T}$ $(r_{\lambda T})$ черного тела

$$R_e = \int_0^\infty r_{\nu T}\, d\nu = \int_0^\infty r_{\lambda T}\, d\lambda.$$

● Энергетическая светимость серого тела

$$R_T^c = A_T\, \sigma T^4.$$

где A_T — поглощательная способность серого тела

● Закон смещения Вина

$$\lambda_{max} = b/T,$$

где λ_{max} — длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости черного тела, b — постоянная Вина

● Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости черного тела от температуры

$$(r_{\lambda T})_{max} = CT^5,$$

где $C = 1{,}30 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м$^3 \cdot$К^5)

● Формула Рэлея - Джинса для спектральной плотности энергетической светимости черного тела

$$r_{\nu T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

где k — постоянная Планка

● Энергия кванта

$$\varepsilon_0 = h\nu = hc/\lambda.$$

● Формула Планка

$$r_{\nu T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1},$$

$$r_{\lambda T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(kT\lambda)} - 1}$$

● Связь радиационной T_p и истинной T температур

$$T_p = \sqrt[4]{A_T}\, T,$$

где A_T — поглощательная способность серого тела

● Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$\varepsilon = h\nu = A + T_{max},$$

где $\varepsilon = h\nu$ — энергия фотона, падающего на поверхность металла; A — работа выхода электрона из металла, T_{max} — максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона

● «Красная граница» фотоэффекта для данного металла

$$\nu_0 = A/h, \quad \lambda_0 = hc/A,$$

где λ_0 — максимальная длина волны излучения (ν_0 — соответственно минимальная частота), при которой фотоэффект еще возможен

● Масса и импульс фотона

$$m_\gamma = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}, \quad p_\gamma = \frac{h\nu}{c},$$

где $h\nu$ — энергия фотона

● Давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность,

$$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = w(1+\rho),$$

где $E_e = Nh\nu$ — облученность поверхности (энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени), ρ — коэффициент отражения; w — объемная плотность энергии излучения

● Изменение длины волны рентгеновского излучения при комптоновском рассеянии

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\vartheta) = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\vartheta}{2} = 2\lambda_C \sin^2\frac{\vartheta}{2},$$

где λ и λ' — длины волн падающего и рассеянного излучения; m_0 — масса электрона; ϑ — угол рассеяния; $\lambda_C = h/(m_0 c)$ — комптоновская длина волны.

Примеры решения задач

Задача 15. Максимум спектральной плотности энергетической светимости Солнца приходится на длину волны $\lambda = 0{,}48$ мкм. Считая, что Солнце излучает как черное тело, определить: 1) температуру его поверхности; 2) мощность, излучаемую его поверхностью.

Дано: $\lambda = 0{,}48$ мкм $= 4{,}8\cdot10^{-7}$ м, $r = 6{,}95\cdot10^8$ м.

Определить: 1) T; 2) P.

Решение. Согласно закону смещения Вина, искомая температура поверхности Солнца

$$T = b/\lambda_{\max},$$

где $b = 2{,}9\cdot10^{-3}$ м·К — постоянная Вина.

Мощность, излучаемая поверхностью Солнца,

$$P = R_e S, \qquad (1)$$

где R_e — энергетическая светимость черного тела (Солнца); $S = 4\pi r^2$ — площадь поверхности Солнца. Согласно закону Стефана — Больцмана,

$$R_e = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К^4) — постоянная Стефана — Больцмана.

Подставив записанные выражения в формулу (1), найдем искомую мощность, излучаемую поверхностью Солнца:

$$P = 4\pi\sigma T^4 r^2.$$

Вычисляя, получим: 1) $T = 6{,}04$ кК; 2) $P = 4{,}58\cdot10^{26}$ Вт.

Задача 16. Определить количество теплоты, теряемой 50 см^2 поверхности расплавленной платины за 1 мин, если поглощательная способность платины $A_T = 0{,}8$. Температура t плавления платины равна 1770 °C.

Дано: $S = 50$ см$^2 = 5\cdot10^{-3}$ м^3, $t = 1$ мин $= 60$ с, $T = 2043$ К, $A_T = 0{,}8$.

Определить Q.

Решение. Количество теплоты, теряемое платиной, равно энергии, излучаемой ее раскаленной поверхностью:

$$Q = W = A_T R_e S t, \qquad (1)$$

где R_e — энергетическая светимость черного тела; S — поверхность излучения; t — время.

Согласно закону Стефана — Больцмана,

$$R_e = \sigma T^4, \qquad (2)$$

где $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К^4) — постоянная Стефана — Больцмана. Подставив (2) в (1), найдем искомое количество теплоты, теряемое раскаленной платиной:

$$Q = A_T\sigma T^4 S t.$$

Вычисляя, получим $Q = 237$ кДж.

Задача 17. Натрий освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 40$ нм. Определить наименьшее задерживающее напряжение, при котором фототок прекратится. «Красная граница» фотоэффекта для натрия $\lambda_0 = 584$ нм.

Дано: $\lambda = 40$ нм $= 0{,}4\cdot10^{-7}$ м, $\lambda_0 = 584$ нм $= 5{,}84\times10^{-7}$ м.

Определить U_0.

Решение. Задерживающее напряжение можно определить из выражения

$$eU_0 = mv_{\max}^2/2 \qquad (1)$$

($e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл — заряд электрона), кинетическую энергию электрона — из уравнения Эйнштейна

$$h\nu = hc/\lambda = A + mv_{\max}^2/2 \qquad (2)$$

(учли, что энергия фотона, вызывающего фотоэффект, $\varepsilon = hc/\lambda < 5$ кэВ), где работа выхода

$$A = h\nu_0 = hc/\lambda_0. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) = \frac{hc(\lambda_0-\lambda)}{\lambda_0\lambda}. \qquad (4)$$

Подставив (4) в (1), найдем искомое задерживающее напряжение:

$$U_0 = \frac{hc(\lambda_0-\lambda)}{e\lambda\lambda_0}.$$

Вычисляя, получим $U_0 = 28{,}9$ В.

Задача 18. Определить энергию электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон ($\lambda = 100$ пм) был рассеян на угол $\vartheta = 180°$.

Дано: $\lambda = 100$ пм $= 10^{-10}$ м, $\vartheta = 180°$.

Определить W.

Решение. Энергия электрона отдачи равна разности энергий падающего и рассеянного фотонов:

$$W = \varepsilon - \varepsilon' = h\nu - h\nu' = h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda'} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda\lambda'}, \qquad (1)$$

где $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ — изменение длины волны фотона в результате рассеяния на свободном электроне:

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\vartheta}{2}, \qquad (2)$$

где $m_0 = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг — масса покоя электрона; $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка.

Подставив (2) в (1) и учитывая, что $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$, найдем искомую энергию электрона отдачи:

$$W = \frac{2h^2\sin^2(\vartheta/2)}{m_0\lambda\left(\lambda + \dfrac{2h}{m_0c}\sin^2(\vartheta/2)\right)}.$$

Вычисляя, получим $W = 9{,}2\cdot10^{-17}$ Дж $= 575$ эВ.

Задача 19. Давление монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм на поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}3$, расположенную перпендикулярно падающему свету, равно 0,2 мкПа. Определить число фотонов, падающих ежесекундно на единицу площади этой поверхности.

Дано: $\lambda = 500$ нм $= 5\cdot10^{-7}$ м, $\rho = 0{,}3$, $p = 0{,}2$ мкПа $= 2\cdot10^{-7}$ Па.

Определить N.

Решение. Давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность,

$$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho),$$

где E_e — облученность поверхности, т. е. энергия всех фотонов, падающих в единицу времени на единицу поверхности; $E_e = Nh\nu$. Так как $\nu = c/\lambda$, то

$$p = Nh(1+\rho)/\lambda,$$

откуда искомое число фотонов, падающих ежесекундно на единицу площади поверхности,

$$N = \frac{p\lambda}{(1+\rho)h}.$$

Вычисляя, получаем $N = 1{,}16\cdot10^{20}$ м$^{-2}$с$^{-1}$.

5.169. Объяснить, почему в неотапливаемом помещении температура всех тел одинакова.

5.170. Объяснить, почему открытые окна домов со стороны улиц кажутся черными.

5.171. Чайная фарфоровая чашка на светлом фоне имеет темный рисунок. Объяснить, почему если эту чашку быстро вынуть из печи, где она нагревалась до высокой температуры, и рассматривать в темноте, то наблюдается светлый рисунок на темном фоне.

5.172. Имеется два одинаковых алюминиевых чайника, в которых до одной и той же температуры нагрето одинаковое количество воды. Один чайник закопчен, а другой — чистый. Объяснить, какой из чайников остынет быстрее и почему.

5.173. Определить, во сколько раз необходимо уменьшить термодинамическую температуру черного тела, чтобы его энергетическая светимость R_e ослабилась в 16 раз. [В 2 раза]

5.174. Температура внутренней поверхности муфельной печи при открытом отверстии площадью 30 см^2 равна 1,3 кК. Принимая, что отверстие печи излучает как черное тело, определить, какая часть мощности рассеивается стенками, если потребляемая печью мощность составляет 1,5 кВт. [0,676]

5.175. Энергетическая светимость черного тела $R_e = 10$ кВт/м^2. Определить длину волны, соответствующую максимуму спектральной плотности энергетической светимости этого тела. [4,47 мкм]

5.176. Определить, как и во сколько раз изменится мощность излучения черного тела, если длина волны, соответствующая максимуму его спектральной плотности энергетической светимости, сместилась с $\lambda_1 = 720$ нм до $\lambda_2 = 400$ нм. [Увеличится в 10,5 раза]

5.177. Черное тело находится при температуре $T_1 = 3$ кК. При остывании тела длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 8$ мкм. Определить температуру T_2, до которой тело охладилось. [323 К]

5.178. Черное тело нагрели от температуры $T_1 = 600$ К до $T_2 = 2400$ К. Определить: 1) во сколько раз увеличилась его энергетическая светимость; 2) как изменилась длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости. [1) в 256 раз; 2) уменьшилась на 3,62 мкм]

5.179. Площадь, ограниченная графиком спектральной плотности энергетической светимости $r_{\lambda,T}$ черного тела, при переходе от термодинамической температуры T_1 к температуре T_2 увеличилась в 5 раз. Определить, как изменится при этом длина волны λ_{max}, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости черного тела. [Уменьшится в 1,49 раза]

5.180. В результате нагревания черного тела длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, сместилась с $\lambda_1 = 2{,}7$ мкм до $\lambda_2 = 0{,}9$ мкм. Определить, во сколько раз увеличилась: 1) энергетическая светимость тела; 2) максимальная спектральная плотность энергетической светимости тела. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости черного тела возрастает согласно закону $r_{\lambda,T} = CT^5$, где $C = 1{,}3\cdot 10^{-5}$ Вт/(м$^3\cdot$К^5). [1) в 81 раз; 2) в 243 раза]

5.181. Определить, какая длина волны соответствует максимальной спектральной плотности энергетической светимости $(r_{\lambda,T})_{max}$, равной $1{,}3\cdot 10^{11}$ (Вт/м^2)/м (см. задачу 5.180). [1,83 мкм]

5.182. Считая никель черным телом, определить мощность, необходимую для поддержания температуры расплавленного никеля 1453 °C неизменной, если площадь его поверхности равна 0,5 см^2. Потерями энергии пренебречь. [25,2 Вт]

5.183. Металлическая поверхность площадью $S = 15$ см^2, нагретая до температуры $T = 3$ кК, излучает в одну минуту 100 кДж. Определить: 1) энергию, излучаемую этой поверхностью, считая ее черной; 2) отношение энергетических светимостей этой поверхности и черного тела при данной температуре. [1) 413 кДж; 2) 0,242]

5.184. Принимая Солнце за черное тело и учитывая, что его максимальной спектральной плотности энергетической светимости соответствует длина волны $\lambda = 500$ нм, определить: 1) температуру поверхности Солнца; 2) энергию, излучаемую Солнцем в виде электромагнитных волн за 10 мин; 3) массу, теряемую Солнцем за это время за счет излучения. [1) 5,8 кК; 2) $2{,}34\cdot 10^{29}$ Дж; 3) $2{,}6\cdot 10^{12}$ кг]

5.185. Определить температуру тела, при которой оно при

температуре окружающей среды $t_0 = 23$ °C излучало энергии в 10 раз больше, чем поглощало. [533 К]

5.186. Считая, что тепловые потери обусловлены только излучением, определить, какую мощность необходимо подводить к медному шарику диаметром $d = 2$ см, чтобы при температуре окружающей среды $t_0 = -13$ °C поддерживать его температуру равной $t = 17$ °C. Принять поглощательную способность меди $A_T = 0{,}6$. [0,107 Вт]

5.187. Определить силу тока, протекающего по вольфрамовой проволоке диаметром $d = 0{,}8$ мм, температура которой в вакууме поддерживается постоянной и равной $t = 2800$ °C. Поверхность проволоки принять в качестве серой с поглощательной способностью $A_T = 0{,}343$. Удельное сопротивление проволоки при данной температуре $\rho = 0{,}92\cdot 10^{-4}$ Ом·см. Температура окружающей проволоку среды $t_0 = 17$ °C. [48,8 А]

5.188. Преобразовать формулу Планка для спектральной плотности энергетической светимости черного тела от переменной ν к переменной λ.

5.189. Пользуясь формулой Планка $r_{\nu,T} = \dfrac{2\pi\nu^2}{c^2}\dfrac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)}-1}$, доказать, что в области малых частот ($h\nu \ll kT$) она совпадает с формулой Рэлея — Джинса.

5.190. Пользуясь формулой Планка $r_{\nu,T} = \dfrac{2\pi\nu^2}{c^2}\dfrac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)}-1}$, вывести из нее закон Стефана — Больцмана.

5.191. Пользуясь формулой Планка $r_{\lambda,T} = \dfrac{2\pi c^2 h}{\lambda^5}\dfrac{1}{e^{hc/(k\lambda T)}-1}$, вывести из нее закон Вина.

5.192. Используя формулу Планка, определить спектральную плотность потока излучения единицы поверхности черного тела, приходящегося на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 5$ нм около максимума спектральной плотности энергетической светимости, если температура черного тела $T = 2500$ К. [$r_{\lambda,T}\Delta\lambda = 6{,}26$ кВт/м^2]

5.193. Объяснить: 1) происхождение радиационной, цветовой и яркостной температур; 2) может ли радиационная температура быть больше истинной.

5.194. Для вольфрамовой нити при температуре $T = 3500$ К поглощательная способность $A_T = 0{,}35$. Определить радиационную температуру нити. [2,69 кК]

5.195. Отношение энергетической светимости R_T^c серого тела к энергетической светимости R_e черного тела равно

A_T. Вывести связь между истинной и радиационной температурами. $[T = T_p/\sqrt[4]{A_T}]$

5.196. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла, если фототок прекращается при приложении задерживающего напряжения $U_0 = 3{,}7$ В. [1,14 Мм/с]

5.197. Освещая поочередно фотокатод двумя разными монохроматическими источниками, находящимися на одинаковых расстояниях от катода, получили две зависимости (*1* и *2*) фототока от напряжения между катодом и анодом (рис. 104). Объяснить, в чем отличие этих источников.

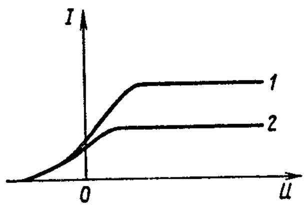


Рис. 104

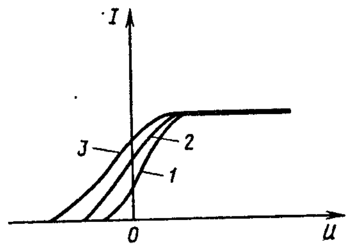


Рис. 105

5.198. «Красная граница» фотоэффекта для некоторого металла равна 500 нм. Определить минимальное значение энергии фотона, вызывающего фотоэффект. [2,48 эВ]

5.199. На рис. 105 схематически представлены вольт-амперные характеристики (кривые *1, 2* и *3*) фотоэффекта для одного и того же металла. Объяснить причину отличия этих кривых.

5.200. Фотоэлектроны, вырываемые с поверхности металла, полностью задерживаются при приложении обратного напряжения $U_0 = 3$ В. Фотоэффект для этого металла начинается при частоте падающего монохроматического света $\nu_0 = 6 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$. Определить: 1) работу выхода электронов из этого металла; 2) частоту применяемого облучения. [1) 2,48 эВ; 2) $1{,}32 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$]

5.201. Определить работу выхода A электронов из вольфрама, если «красная граница» фотоэффекта для него $\lambda_0 = 275$ нм. [4,52 эВ]

5.202. Калий освещается монохроматическим светом с длиной волны 400 нм. Определить наименьшее задерживающее напряжение, при котором фототок прекратится. Работа выхода электронов из калия равна 2,2 эВ. [0,91 В]

5.203. «Красная граница» фотоэффекта для некоторого металла равна 500 нм. Определить: 1) работу выхода электронов из этого металла; 2) максимальную скорость электронов, вырываемых из этого металла светом с длиной волны 400 нм. [1) 2,48 эВ; 2) 468 км/с]

5.204. Выбиваемые светом при фотоэффекте электроны при облучении фотокатода видимым светом полностью задерживаются обратным напряжением $U_0 = 1{,}2$ В. Специальные измерения показали, что длина волны падающего света $\lambda = 400$ нм. Определить «красную границу» фотоэффекта. [652 нм]

5.205. Задерживающее напряжение для платиновой пластинки (работа выхода 6,3 эВ) составляет 3,7 В. При тех же условиях для другой пластинки задерживающее напряжение равно 5,3 В. Определить работу выхода электронов из этой пластинки. [4,7 эВ]

5.206. Определить, до какого потенциала зарядится уединенный серебряный шарик при облучении его ультрафиолетовым светом длиной волны $\lambda = 208$ нм. Работа выхода электронов из серебра $A = 4{,}7$ эВ. [1,27 В]

5.207. При освещении вакуумного фотоэлемента монохроматическим светом с длиной волны $\lambda_1 = 0{,}4$ мкм он заряжается до разности потенциалов $\varphi_1 = 2$ В. Определить, до какой разности потенциалов зарядится фотоэлемент при освещении его монохроматическим светом с длиной волны $\lambda_2 = 0{,}3$ мкм. [3,04 В]

5.208. Плоский серебряный электрод освещается монохроматическим излучением с длиной волны $\lambda = 83$ нм. Определить, на какое максимальное расстояние от поверхности электрода может удалиться фотоэлектрон, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженностью $E = 10$ В/см. «Красная граница» фотоэффекта для серебра $\lambda_0 = 264$ нм. [1,03 см]

5.209. Фотоны с энергией $\varepsilon = 5$ эВ вырывают фотоэлектроны из металла с работой выхода $A = 4{,}7$ эВ. Определить максимальный импульс, передаваемый поверхности этого металла при вылете электрона. [$2{,}96 \times 10^{-25}$ кг·м/с]

5.210. При освещении катода вакуумного фотоэлемента монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 310$ нм фототок прекращается при некотором задерживающем напряжении. При увеличении длины волны на 25 % задерживающее напряжение оказывается меньше на 0,8 В. Определить по этим экспериментальным данным постоянную Планка. [$6{,}61 \times 10^{-34}$ Дж·с]

5.211. Определить максимальную скорость v_{max} фотоэлектронов, вырываемых с поверхности цинка (работа выхода $A = 4$ эВ), при облучении γ-излучением с длиной волны $\lambda = 2{,}47$ пм. [259 Мм/с]

5.212. Определить для фотона с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм: 1) его энергию; 2) импульс; 3) массу. [1) 2,48 эВ; 2) $1{,}33 \cdot 10^{-27}$ кг·м/с; 3) $4{,}43 \cdot 10^{-36}$ кг]

5.213. Определить энергию фотона, при которой его масса равна массе покоя электрона. Ответ выразить в электрон-вольтах. [0,512 МэВ]

5.214. Определить, с какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона, длина волны которого $\lambda = 0{,}5$ мкм. [1,45 км/с]

5.215. Определить длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, прошедшего разность потенциалов $U = 9{,}8$ В. [392 пм]

5.216. Определить температуру, при которой средняя энергия молекул трехатомного газа равна энергии фотонов, соответствующих излучению $\lambda = 600$ нм. [8 кК]

5.217. Определить, с какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона, длина волны которого $\lambda = 0{,}5$ мкм. [934 км/с]

5.218. Определить, с какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона, длина волны которого $\lambda = 2$ пм. [0,77 c]

5.219. Доказать, что световое давление, оказываемое на поверхность тела потоком монохроматического излучения, падающего перпендикулярно поверхности, в случае идеального зеркала равно $2w$, а в случае полностью поглощающей поверхности равно w, где w — объемная плотность энергии излучения.

5.220. Давление монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 0,12 мкПа. Определить число фотонов, падающих ежесекундно на 1 м² поверхности. [$9{,}05 \cdot 10^{19}$]

5.221. На идеально отражающую поверхность площадью $S = 5$ см² за время $t = 3$ мин нормально падает монохроматический свет, энергия которого $W = 9$ Дж. Определить: 1) облученность поверхности; 2) световое давление, оказываемое на поверхность. [1) 100 Вт/м²; 2) 667 нПа]

5.222. Определить давление света на стенки электрической 150-ваттной лампочки, принимая, что вся потребляемая мощность идет на излучение и стенки лампочки отражают 15 % падающего на них света. Считать лампочку сферическим сосудом радиуса 4 см. [28,6 мкПа]

5.223. Давление монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, равно 0,15 мкПа. Определить число фотонов, падающих на поверхность площадью 40 см² за одну секунду. [$4{,}52 \cdot 10^{17}$]

5.224. Давление p монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, составляет 0,1 мкПа. Определить: 1) концентрацию n фотонов в световом пучке; 2) число N фотонов, падающих ежесекундно на 1 м² поверхности. [1) $3{,}02 \times 10^{11}$ м$^{-3}$, 2) $9{,}06 \cdot 10^{19}$]

5.225. На идеально отражающую плоскую поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм. Поток излучения Φ_e составляет 0,45 Вт. Определить: 1) число фотонов N, падающих на поверхность за время $t = 3$ с; 2) силу давления, испытываемую этой поверхностью. [1) $3{,}73 \cdot 10^{18}$; 2) 3 нН]

5.226. Плоская световая волна интенсивностью $I = 0{,}1$ Вт/см² падает под углом $\alpha = 30°$ на плоскую отражающую поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}7$. Используя квантовые представления, определить нормальное давление, оказываемое светом на эту поверхность. [4,25 мкПа]

5.227. Рассматривая особенности механизма комптоновского рассеяния, объяснить: 1) почему длина волны рассеянного излучения больше, чем длина волны падающего излучения; 2) наличие в составе рассеянного излучения «несмещенной» линии.

5.228. Определить длину волны рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения под углом $\vartheta = 60°$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной 57 пм. [55,8 пм]

5.229. Фотон с энергией $\varepsilon = 1{,}025$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Опре-делить угол рассеяния фотона, если длина волны рассеянного фотона оказалась равной комптоновской длине волны $\lambda_C = 2{,}43$ пм. [60°]

5.230. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. Оказывается, что длины волн рассеянного под углами $\vartheta_1 = 60°$ и $\vartheta_2 = 120°$ излучения отличаются в 1,5 раза. Определить длину волны падающего излучения, предполагая, что рассеяние происходит на свободных электронах. [3,64 пм]

5.231. Фотон с длиной волны $\lambda = 5$ пм испытал комптоновское рассеяние под углом $\vartheta = 90°$ на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить: 1) изменение длины волны при рассеянии; 2) энергию электрона отдачи; 3) импульс электрона отдачи. [1) 2,43 пм; 2) 81,3 кэВ; 3) $1{,}6 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с]

5.232. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}25$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить кинетическую энергию электрона отдачи, если длина волны рассеянного фотона изменилась на 20 %. [41,7 кэВ]

5.233. Фотон с энергией 0,3 МэВ рассеялся под углом $\vartheta = 180°$ на свободном электроне. Определить долю энергии фотона, приходящуюся на рассеянный фотон. [0,461]

5.234. Фотон с энергией 100 кэВ в результате комптоновского эффекта рассеялся при соударении со свободным электроном на угол $\vartheta = \pi/2$. Определить энергию фотона после рассеяния. [87,3 кэВ]

5.235. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}25$ МэВ рассеялся под углом $\vartheta = 120°$ на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить кинетическую энергию электрона отдачи. [106 кэВ]

6 Элементы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел

6.1. Теория атома водорода по Бору

Основные законы и формулы

● Обобщенная формула Бальмера, описывающая серии в спектре водорода,

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где ν — частота спектральных линий в спектре атома водорода; R — постоянная Ридберга; m определяет серию ($m = 1, 2, 3, \ldots$); n определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m+1, m+2, \ldots$): $m = 1$ (серия Лаймана), $m = 2$ (серия Бальмера), $m = 3$ (серия Пашена), $m = 4$ (серия Брэкета), $m = 5$ (серия Пфунда), $m = 6$ (серия Хэмфри).

● Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний)

$$m_e v r_n = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где m_e — масса электрона; v — скорость электрона по n-й орбите радиусом r_n.

● Второй постулат Бора (правило частот)

$$h\nu = E_n - E_m,$$

где E_n и E_m — соответственно энергии стационарных состояний атома до и после излучения (поглощения).

● Энергия электрона на n-й стационарной орбите

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где Z — порядковый номер элемента в системе Менделеева; ε_0 — электрическая постоянная.

Примеры решения задач

Задача 1. Определить частоту света, излучаемого возбужденным атомом водорода, при переходе электрона на второй энергетический уровень, если радиус орбиты электрона изменился в 9 раз.

Дано: $m=2$, $r_n/r_2=9$.

Определить ν.

Решение. Согласно обобщенной формуле Бальмера, частота света, излучаемого атомом водорода,

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right), \qquad (1)$$

где $R=3{,}29\cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ — постоянная Ридберга; m определяет серию (по условию задачи, $m=2$ — серия Бальмера), т. е. номер орбиты, на которую переходит электрон; n определяет отдельную линию серии, т. е. номер орбиты, с которой переходит электрон.

Второй закон Ньютона для электрона, движущегося по окружности радиусом r_n под действием кулоновской силы,

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2}. \qquad (2)$$

Согласно теории Бора, момент импульса электрона, движущегося по n-й орбите,

$$m_e v_n r_n = n\hbar \quad (n=1, 2, 3, \ldots). \qquad (3)$$

Решая уравнения (2) и (3), получим

$$r_n = n^2\frac{\hbar^2\cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2}. \qquad (4)$$

Из выражения (4) и условия задачи следует, что

$$r_n/r_2 = n^2/m^2 = 9. \qquad (5)$$

Умножив и разделив правую часть уравнения (1) на m^2 и учитывая (5), получим искомую частоту

$$\nu = R\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{m^2}=\frac{R}{4}\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{9}R.$$

Вычисляя, получаем $\nu=7{,}31\cdot 10^{14}$ с$^{-1}$.

Задача 2. Определив энергию ионизации атома водорода, найти в электрон-вольтах энергию фотона, соответствующую самой длинноволновой линии серии Лаймана.

Дано $m=1$.

Найти: 1) E_i; 2) $E_{\lambda_{max}}$.

Решение. Энергия ионизации атома (энергия, необходимая для отрыва электрона, находящегося в основном состоянии, от атома) определяется уравнением

$$E_i = h\nu = hR\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right),$$

где $R=3{,}29\cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ — постоянная Ридберга; $m=1$ и $n=\infty$. Тогда искомая энергия ионизации

$$E_i = hR. \qquad (1)$$

Самая длинноволновая линия серии Лаймана (рис. 106) соответствует переходу электрона со второго энергетического уровня на основной, т. е.

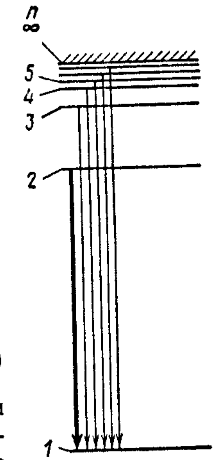


Рис. 106

$$E_{\lambda_{max}} = E_{21} = h\nu_{21} = hR\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{4}hR.$$

Учитывая (1), получим искомую энергию фотона, соответствующую самой длинноволновой линии серий Лаймана:

$$E_{\lambda_{max}} = \frac{3}{4}E_i.$$

Вычисляя, получаем: 1) $E_i=13{,}6$ эВ; 2) $E_{\lambda_{max}}=10{,}2$ эВ.

Задачи

6.1. Определить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на второй. [1,89 эВ]

6.2. Определить максимальную и минимальную энергии фотона в видимой серии спектра водорода (серии Бальмера). [$E_{max}=3{,}41$ эВ, $E_{min}=1{,}89$ эВ]

6.3. Определить длину волны λ, соответствующую второй спектральной линии в серии Пашена. [1,28 мкм]

6.4. Максимальная длина волны спектральной водородной линии серии Лаймана равна 0,12 мкм. Предполагая, что постоянная Ридберга неизвестна, определить максимальную длину волны линии серии Бальмера. [0,65 мкм]

6.5. Определить длину волны спектральной линии, соответствующую переходу электрона в атоме водорода с шестой боровской орбиты на вторую. К какой серии относится эта линия и которая она по счету? [0,41 мкм]

6.6. Определить длины волн, соответствующие: 1) границе серии Лаймана; 2) границе серии Бальмера; 3) границе серии Пашена. Проанализировать результаты. [1) 91 нм; 2) 364 нм; 3) 820 нм]

6.7. Атом водорода находится в возбужденном состоянии, характеризуемом главным квантовым числом $n = 4$. Определить возможные спектральные линии в спектре водорода, появляющиеся при переходе атома из возбужденного состояния в основное. [$1{,}21 \cdot 10^{-7}$ м, $1{,}02 \times 10^{-7}$ м, $0{,}97 \cdot 10^{-7}$ м, $6{,}54 \cdot 10^{-7}$ м, $4{,}85 \cdot 10^{-7}$ м, $18{,}7 \times 10^{-7}$ м]

6.8. В инфракрасной области спектра излучения водорода обнаружено четыре серии — Пашена, Брэкета, Пфунда и Хэмфри. Записать сериальные формулы для них и определить самую длинноволновую линию: 1) в серии Пашена; 2) в серии Хэмфри. [1) 1,87 мкм, 2) 12,3 мкм]

6.9. Определить число спектральных линий, испускаемых атомарным водородом, возбужденным на n-й энергетический уровень. [$N = n(n-1)/2$]

6.10. На дифракционную решетку с периодом d нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Оказалось, что в спектре дифракционный максимум k-го порядка, наблюдаемый под углом φ, соответствовал одной из линий серии Лаймана. Определить главное квантовое число, соответствующее энергетическому уровню, с которого произошел переход. [$n = (1 - ck/(Rd\sin\varphi))^{-1/2}$]

6.11. Используя теорию Бора для атома водорода, определить: 1) радиус ближайшей к ядру орбиты (первый боровский радиус); 2) скорость движения электрона по этой орбите. [1) 52,8 пм; 2) 2,19 Мм/с]

6.12. Определить, на сколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 4{,}86 \cdot 10^{-7}$ м. [На 2,56 эВ]

6.13. Определить длину волны λ спектральной линии, излучаемой при переходе электрона с более высокого уровня энергии на более низкий уровень, если при этом энергия атома уменьшилась на $\Delta E = 10$ эВ. [124 нм]

6.14. Используя теорию Бора, определить орбитальный магнитный момент электрона, движущегося по третьей орбите атома водорода. [$p_m = en\hbar/(2m) = 2{,}8 \times 10^{-23}$ А$\cdot$м^2]

6.15. Определить изменение орбитального механического

момента электрона при переходе его из возбужденного состояния в основное с испусканием фотона с длиной волны $\lambda = 1{,}02 \cdot 10^{-7}$ м. [$\Delta L = 2\hbar = 2{,}1 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с]

6.16. Позитроний — атомоподобная система, состоящая из позитрона и электрона, вращающегося относительно общего центра масс. Применяя теорию Бора, определить минимальные размеры подобной системы. [$d_{\min} = 2\varepsilon_0 h^2/(\pi m e^2) = 106$ пм]

6.17. Предполагая, что в опыте Франка и Герца вакуумная трубка наполнена не парами ртути, а разреженным атомарным водородом, определить, через какие интервалы ускоряющего потенциала φ возникнут максимумы на графике зависимости силы анодного тока от ускоряющего потенциала. [10,2 В]

6.18. Используя постоянную Планка $\hbar$, электрическую постоянную ε_0, массу m и заряд e электрона, составить формулу для величины, характеризующей атом водорода по Бору и имеющей размерность длины. Указать, что это за величина.

6.19. Доказать, что энергетические уровни атома водорода могут быть описаны выражением $E_n = -\dfrac{2\pi\hbar}{n^2} R$, где R — постоянная Ридберга.

6.20. Определить скорость v электрона по третьей орбите атома водорода. [$v = e^2/(4\pi\varepsilon_0 n\hbar) = 0{,}731$ Мм/с]

6.21. Электрон находится на первой боровской орбите атома водорода. Определить для электрона: 1) потенциальную энергию E_p; 2) кинетическую энергию $E_к$; 3) полную энергию E. [1) $-27{,}2$ эВ; 2) 13,6 эВ; 3) $-13{,}6$ эВ]

6.22. Определить частоту f вращения электрона по третьей орбите атома водорода. [$f = me^4/(4n^3\varepsilon_0^2 h^3) = 2{,}42 \times 10^{14}$ Гц]

6.23. Определить: 1) частоту f вращения электрона, находящегося на первой боровской орбите; 2) эквивалентный ток. [1) $6{,}58 \cdot 10^{15}$ Гц; 2) 1,06 мА]

6.24. Определить частоту света, излучаемого атомом водорода, при переходе электрона на уровень с главным квантовым числом $n = 2$, если радиус орбиты электрона изменился в $k = 9$ раз. [$0{,}731 \cdot 10^{15}$ Гц]

6.25. Пользуясь теорией Бора, найти числовое значение постоянной Ридберга. [$R = me^4/(8h^3\varepsilon_0^2) = 3{,}27 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$]

6.26. Определить потенциал ионизации атома водорода. [13,6 В]

6.27. Основываясь на том, что энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ, определить первый потенциал возбуждения φ_1 этого атома. [10,2 В]

6.28. Определить первый потенциал возбуждения атома водорода. [$\varphi_1 = 3Rh/(4e) = 10{,}2$ В]

6.29. Основываясь на том, что энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ, определить в электрон-вольтах энергию фотона, соответствующую самой длинноволновой линии серии Бальмера. [1,89 эВ]

6.30. Основываясь на том, что первый потенциал возбуждения атома водорода $\varphi_1 = 10{,}2$ В, определить в электронвольтах энергию фотона, соответствующую второй линии серии Бальмера. [2,55 эВ]

6.31. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы удалить электрон со второй боровской орбиты атома водорода за пределы притяжения его ядром. [$5{,}45 \cdot 10^{-19}$ Дж]

6.32. Электрон выбит из атома водорода, находящегося в основном состоянии, фотоном энергии $\varepsilon = 17{,}7$ эВ. Определить скорость v электрона за пределами атома. [1,2 Мм/с]

6.33. Фотон с энергией $E = 12{,}12$ эВ, поглощенный атомом водорода, находящимся в основном состоянии, переводит атом в возбужденное состояние. Определить главное квантовое число этого состояния. [3]

6.34. Определить, какие спектральные линии появятся в видимой области спектра излучения атомарного водорода под действием ультрафиолетового излучения с длиной волны $\lambda = 0{,}1$ мкм. [$1{,}22 \cdot 10^{-7}$ м, $1{,}03 \cdot 10^{-7}$ м, $6{,}56 \cdot 10^{-7}$ м]

6.35. В излучении звезды обнаружен водородоподобный спектр, длины волн которого в 9 раз меньше, чем у атомарного водорода. Определить элемент, которому принадлежит данный спектр. [$Z = 3$, литий]

6.36. Применяя теорию Бора к мезоатому водорода (в мезоатоме водорода электрон заменен мюоном, заряд которого равен заряду электрона, а масса в 207 раз больше массы электрона), определить: 1) радиус первой орбиты мезоатома; 2) энергию ионизации мезоатома. [1) 0,254 пм; 2) 2,81 кэВ]

6.37. Определить, какая энергия требуется для полного отрыва электрона от ядра однократно ионизованного атома гелия, если: 1) электрон находится в основном состоянии; 2) электрон находится в состоянии, соответствующем главному квантовому числу $n = 3$. [1) 54,4 эВ; 2) 6,04 эВ]

6.2. Элементы квантовой механики

Основные законы и формулы

- Связь дебройлевской волны частицы с импульсом p

$$\lambda = h/p = h/(mv),$$

где m — масса частицы; v — ее скорость.

- Фазовая скорость свободно движущейся со скоростью v частицы массой m

$$v_{\text{фаз}} = \omega/k = E/p = c^2/v,$$

где $E = \hbar\omega$ — энергия частицы (ω — круговая частота); $p = \hbar k$ — импульс ($k = 2\pi/\lambda$ — волновое число).

- Групповая скорость свободно движущейся частицы

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}.$$

- Соотношения неопределенностей:

для координаты и импульса частицы

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant h,$$
$$\Delta y \Delta p_y \geqslant h,$$
$$\Delta z \Delta p_z \geqslant h,$$

где Δx, Δy, Δz — неопределенности координат; Δp_x, Δp_y, Δp_z — неопределенности соответствующих проекций импульса частицы на оси координат;

для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geqslant h,$$

где ΔE — неопределенность энергии данного квантового состояния; Δt — время пребывания системы в данном состоянии.

- Вероятность нахождения частицы в объеме dV

$$dW = \Psi\Psi^* dV = |\Psi|^2 dV,$$

где $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы; Ψ^* — функция, комплексно сопряженная с Ψ; $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ — квадрат модуля волновой функции.

Для стационарных состояний

$$dW = \psi\psi^* dV = |\psi|^2 dV,$$

где $\psi = \psi(x, y, z)$ — координатная (амплитудная) часть волновой функции.

- Условие нормировки вероятностей

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1,$$

где интегрирование производится по всему бесконечному пространству, т. е. по координатам x, y, z от $-\infty$ до $+\infty$.

● Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx.$$

● Среднее значение физической величины L, характеризующей частицу, находящуюся в состоянии, описываемом волновой функцией Ψ,

$$\langle L \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} L|\Psi|^2 dV.$$

● Общее уравнение Шредингера (уравнение Шредингера, зависящее от времени)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x,\ y,\ z,\ t)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

где $\Psi = \Psi(x,\ y,\ z,\ t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы; $\hbar = h/(2\pi)$; m — масса частицы; Δ — оператор Лапласа $\left(\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)$; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; $U = U(x,\ y,\ z,\ t)$ — потенциальная энергия частицы в силовом поле, в котором она движется.

● Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$

где $\psi = \psi(x,\ y,\ z)$ — координатная часть волновой функции ($\Psi(x,\ y,\ z,\ t) = \psi(x,\ y,\ z)e^{-i(E/\hbar)t}$); $U = U(x,\ y,\ z)$ — потенциальная энергия частицы; E — полная энергия частицы.

● Волновая функция, описывающая одномерное движение свободной частицы,

$$\Psi(x,\ t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)},$$

где A — амплитуда волн де Бройля; $p_x = k\hbar$ — импульс частицы; $E = \hbar\omega$ — энергия частицы.

● Собственные значения энергии E_n частицы, находящейся на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками»,

$$E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где l — ширина ямы.

● Собственная волновая функция, соответствующая вышеприведенному собственному значению энергии,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Коэффициент прозрачности D прямоугольного потенциального барьера конечной ширины l

$$D = D_0\exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}l\right],$$

где D_0 — множитель, который можно приравнять единице; U — высота потенциального барьера; E — энергия частицы.

● Уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора в квантовой механике

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega_0^2x^2}{2}\right)\psi = 0,$$

где $m\omega_0^2x^2/2 = U$ — потенциальная энергия осциллятора; ω_0 — собственная частота колебаний осциллятора; m — масса частицы.

● Собственные значения энергии гармонического осциллятора

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

● Энергия нулевых колебаний гармонического осциллятора

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0.$$

Примеры решения задач

Задача 3. Определить длину волны де Бройля λ электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 700 кВ.

Дано $U = 700$ кВ $= 7\cdot10^5$ В.

Определить λ.

Решение. Связь длины волны де Бройля частицы с импульсом

$$\lambda = h/p,$$

где $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, причем импульс выражается различным образом для нерелятивистского ($p = \sqrt{2m_0T}$) и релятивистского ($p = \sqrt{(2E_0 + T)T}/c$) случаев, где m_0, T, E_0 — соответственно масса покоя, кинетическая энергия, энергия покоя частицы.

Кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U,

$$T = |e|U = 0{,}7\ \text{МэВ},$$

а энергия покоя электрона $E_0 = m_0c^2 = 0{,}512$ МэВ, т. е. в данном случае имеем дело с релятивистской частицей. Тогда искомая длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{(2E_0+T)T}} = \frac{hc}{\sqrt{(2m_0c^2+|e|U)|e|U}}$$

где $m_0 = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг; $c = 3\cdot10^8$ м/с; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Вычисляя, получаем $\lambda = 1{,}13$ пм.

Задача 4. Электронный пучок ускоряется в электронно-лучевой трубке разностью потенциалов $U = 0{,}5$ кВ. Принимая, что неопределенность импульса равна 0,1 % от его числового значения, определить неопределенность координаты электрона. Являются ли в данных условиях электроны квантовой или классической частицей?

Дано: $U = 0{,}5$ кВ $= 500$ В, $\Delta p_x = 0{,}001 p_x$.

Определить Δx.

Решение. Согласно соотношению неопределенностей,

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant h, \qquad (1)$$

где Δx — неопределенность координаты электрона; Δp_x — неопределенность его импульса; $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка.

Кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U, $T = |e|U = 0{,}5$ кэВ, т. е. электрон при данных условиях является нерелятивистской частицей (см. задачу 3), и импульс электрона

$$p = \sqrt{2m_0T} = \sqrt{2m_0|e|U} = 1{,}24\cdot10^{-23}\ \text{кг}\cdot\text{м/с}.$$

Согласно условию задачи, неопределенность импульса $\Delta p_x = 0{,}001 p_x = 1{,}24\cdot10^{-26}$ кг·м/с, т. е. $\Delta p_x \ll p_x$, и электрон при данных условиях является классической частицей. Из выражения (1) следует, что искомая неопределенность координаты электрона

$$\Delta x = h/\Delta p_x.$$

Вычисляя, получаем $\Delta x = 53{,}5$ нм.

Задача 5. Электрон в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной $l = 200$ пм с бесконечно высокими «стенками» находится в возбужденном состоянии ($n = 4$). Определить: 1) минимальную энергию электрона; 2) вероятность W обнаружения электрона в первой четверти «ямы».

Дано: $l = 200$ пм $= 2\cdot10^{-10}$ м, $x_1 = 0$, $x_2 = l/4$.

Определить: 1) $E_{\min}$; 2) W.

Решение. Собственные значения энергии электрона, находящегося на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками»,

$$E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где $m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг — масса электрона; $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. Минимальную энергию электрон имеет при минимальном n, т. е. при $n = 1$:

$$E_{\min} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}.$$

Вероятность обнаружить частицу в интервале $x_1 < x < x_2$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx, \qquad (1)$$

где $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x$ ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) — нормированная собственная волновая функция, соответствующая данному состоянию.

Возбужденному состоянию $n = 4$ отвечает собственная функция

$$\psi_4(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{4\pi}{l}x. \qquad (2)$$

Согласно условию задачи (рис. 107), $x_1 = 0$ и $x_2 = l/4$. Поэтому, подставив (2) в (1), получим

$$W = \frac{2}{l}\int_0^{l/4}\sin^2\frac{4\pi}{l}x\,dx.$$

Заменив $\sin^2(4\pi x/l) = {}^1/_2(1 - \cos 8\pi x/l)$, запишем

$$W = \frac{1}{l}\left[\int_0^{l/4} dx - \int_0^{l/4}\cos(8\pi x/l)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{l}\left[\frac{l}{4} - \frac{l}{8\pi}\sin\frac{8\pi}{l}x\Big|_0^{l/4}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{8\pi}(\sin 2\pi - \sin 0) = 0{,}25.$$

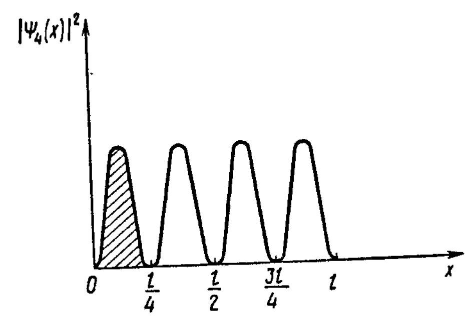


Рис. 107

Вычисляя получим: 1) $E_{min} = 1{,}5 \cdot 10^{-18}$ Дж $= 9{,}37$ эВ; 2) $W = 0{,}25$.

Задача 6. Две частицы, электрон и протон, обе с энергией $E = 5$ эВ, движутся в положительном направлении оси x, встречая на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 10$ эВ и шириной $l = 1$ пм. Определить отношение вероятностей прохождения частицами этого барьера.

Дано: $E = 5$ эВ $= 8 \cdot 10^{-19}$ Дж, $U = 10$ эВ $= 1{,}6 \times 10^{-18}$ Дж, $l = 1$ пм $= 10^{-12}$ м.

Определить W_e/W_p.

Решение. Вероятность прохождения частицы сквозь потенциальный барьер определяется коэффициентом прозрачности: $W = D$,

$$D = D_0\, e^{(-2/\hbar)\sqrt{2m(U-E)}\,l}, \qquad (1)$$

где $D_0 = 1$ (множитель, приравниваемый единице); m — масса частицы; $\hbar = h/(2\pi)$ — постоянная Планка.

Исходя из формулы (1) искомое отношение вероятностей прохождения частицами барьера

$$\frac{W_e}{W_p} = \frac{e^{(-2/\hbar)\sqrt{2m_e(U-E)}\,l}}{e^{(-2/\hbar)\sqrt{2m_p(U-E)}\,l}},$$

где $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг; $\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}$ Дж·с.

Вычисляя, получим $W_e/W_p = 2{,}6$.

Задачи

6.38. Определить импульс и энергию: 1) рентгеновского фотона; 2) электрона, если длина волны того и другого равна 10^{-10} м. [1) $p = 6{,}63 \cdot 10^{-24}$ кг·м/с, $E = 12{,}4$ кэВ, 2) $p = 6{,}63 \cdot 10^{-24}$ кг·м/с, $E = 151$ эВ]

6.39. Определить длину волны де Бройля для электрона, находящегося в атоме водорода на третьей боровской орбите. [1 нм]

6.40. Определить длину волны де Бройля для нейтрона, движущегося со средней квадратичной скоростью при $T = 290$ К. [148 пм]

6.41. Протон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 15$ мТл по окружности радиусом $R = 1{,}4$ м. Определить длину волны де Бройля для протона. [0,197 пм]

6.42. Определить, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы длина волны де Бройля λ для него была равна 1 нм. [0,821 мВ]

6.43. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 500$ В, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 1{,}282$ пм. Принимая заряд этой частицы равным заряду электрона, определить ее массу. [$1{,}672 \times 10^{-27}$ кг]

6.44. Вывести зависимость между длиной волны де Бройля λ релятивистской частицы и ее кинетической энергией. [$\lambda = hc/\sqrt{T(T + 2m_0c^2)}$]

6.45. Вывести зависимость между длиной волны де Бройля λ релятивистского электрона и ускоряющим потенциалом U. $\left[\lambda = \dfrac{hc}{\sqrt{eU(2m_0c^2 + eU)}}\right]$

6.46. Кинетическая энергия электрона равна 1 кэВ. Определить длину волны де Бройля. [38,8 пм]

6.47. Кинетическая энергия электрона равна 0,6 МэВ. Определить длину волны де Бройля. [1,26 пм]

6.48. Определить, при каком числовом значении скорости длина волны де Бройля для электрона равна его комптоновской длине волны. [$v = 2{,}12 \cdot 10^8$ м/с]

6.49. Определить, при каком числовом значении кинетической энергии T длина волны де Бройля электрона равна его комптоновской длине волны. [$T = m_0c^2 \times (\sqrt{2} - 1) = 0{,}212$ МэВ]

6.50. Вывести связь между длиной круговой электронной орбиты и длиной волны де Бройля.

6.51. Определить, как изменится длина волны де Бройля электрона атома водорода при переходе его с четвертой боровской орбиты на вторую. [Уменьшится в 2 раза]

6.52. В опыте Дэвиссона и Джермера, обнаруживших дифракционную картину при отражении пучка электронов от естественной дифракционной решетки — монокристалла никеля, оказалось, что в направлении, составляющем угол $\alpha = 55°$ с направлением падающих электронов, наблюдается максимум отражения четвертого порядка при кинетической энергии электронов $T = 180$ эВ. Определить расстояние между кристаллографическими плоскостями никеля. [$d = hk/(2\sqrt{2mT} \times \cos\alpha/2) = 0{,}206$ нм, k — порядок максимума]

6.53. Моноэнергетический пучок нейтронов, получаемый в результате ядерной реакции, падает на кристалл с периодом $d = 0{,}15$ нм. Определить скорость нейтронов, если брэгговское отражение первого порядка наблюдается, когда угол скольжения $\vartheta = 30°$. [2,64 км/с]

6.54. Параллельный пучок моноэнергетических электронов направлен нормально на узкую щель шириной $a = 1$ мкм. Определить скорость этих электронов, если на экране, отстоящем на расстоянии $l = 20$ см от щели, ширина центрального дифракционного максимума составляет $\Delta x = 48$ мкм. [$v = 2hl/(am\Delta x) = 606$ км/с]

6.55. Параллельный пучок электронов, ускоренный разностью потенциалов $U = 50$ В, направлен нормально на две параллельные, лежащие в одной плоскости, щели, расстояние d между которыми равно 10 мкм. Определить расстояние между центральным и первым максимумами дифракционной картины на экране, который расположен от щелей на расстоянии $l = 0{,}6$ м. [$\Delta x = hl/(d\sqrt{2meU}) = 10{,}4$ мкм]

6.56. Исходя из общей формулы для фазовой скорости ($v_{\text{фаз}} = \omega/k$), определить фазовую скорость волн де Бройля свободно движущейся с постоянной скоростью v частицы в случаях: 1) нерелятивистском; 2) релятивистском. [1) $v/2$; 2) c^2/v]

6.57. Можно вывести, что для релятивистского случая фазовая скорость $v_{\text{фаз}} = c^2/v$ (см. задачу 6.56), т. е. фазовая скорость волн де Бройля больше скорости света в вакууме. Объяснить правомерность этого результата.

6.58. Доказать, что групповая скорость волн де Бройля равна скорости свободно движущейся частицы. Рассмотреть случаи: 1) нерелятивистский; 2) релятивистский.

6.59. Доказать, что для свободно движущейся с постоянной скоростью v частицы выполняется соотношение $v_{\text{фаз}}u = c^2$ (u — групповая скорость).

6.60. Вывести закон дисперсии волн де Бройля, т. е. зависимость фазовой скорости волн де Бройля от их длины волны. Рассмотреть случаи: 1) нерелятивистский; 2) релятивистский. [1) $v_{\text{фаз}} = h/(2m\lambda)$; 2) $v_{\text{фаз}} = c\sqrt{(m_0^2c^2\lambda^2/h^2) + 1}$.]

6.61. Объяснить, почему представление о боровских орбитах несовместимо с принципом неопределенности.

6.62. Ширина следа электрона (обладающего кинетической энергией $T = 1{,}5$ кэВ) на фотопластинке, полученного с помощью камеры Вильсона, составляет $\Delta x = 1$ мкм. Определить, можно ли по данному следу обнаружить

отклонение в движении электрона от законов классической механики. [$\Delta p_x/p_x = 10^{-4}$, нет]

6.63. Электронный пучок ускоряется в электронно-лучевой трубке разностью потенциалов $U = 1$ кВ. Известно, что неопределенность скорости составляет 0,1 % от ее числового значения. Определить неопределенность координаты электрона. Являются ли электроны в данных условиях квантовой или классической частицей? [$\Delta x = 38{,}8$ нм]

6.64. Определить отношение неопределенностей скорости электрона, если его координата установлена с точностью до 10^{-5} м, и пылинки массой $m = 10^{-12}$ кг, если ее координата установлена с такой же точностью. [$1{,}1 \cdot 10^{18}$]

6.65. Электронный пучок выходит из электронной пушки под действием разности потенциалов $U = 200$ В. Определить, можно ли одновременно измерить траекторию электрона с точностью до 100 пм (с точностью порядка диаметра атома) и его скорость с точностью до 10 %. [$m\Delta v\Delta x < h$; нет]

6.66. Электрон движется в атоме водорода по первой боровской орбите. Принимая, что допускаемая неопределенность скорости составляет 10 % от ее числового значения, определить неопределенность координаты электрона. Применимо ли в данном случае для электрона понятие траектории? [$\Delta x = 3{,}34$ нм]

6.67. Применяя соотношение неопределенностей, показать, что для движущейся частицы, неопределенность координаты которой равна длине волны де Бройля, неопределенность скорости равна по порядку величины самой скорости частицы.

6.68. Используя соотношение неопределенностей в форме $\Delta p_x \Delta x \geqslant \hbar$, оценить минимально возможную полную энергию электрона в атоме водорода. Принять неопределенность координаты равной радиусу атома. Сравнить полученный результат с теорией Бора. [$E_{\min} = -me^4/(8h^2\varepsilon_0^2) = -13{,}6$ эВ]

6.69. Объяснить физический смысл соотношения неопределенности для энергии E и времени t: $\Delta E \Delta t \geqslant h$.

6.70. Воспользовавшись соотношением неопределенностей, оценить размытость энергетического уровня в атоме водорода: 1) для основного состояния; 2) для возбужденного состояния (время его жизни равно 10^{-8} с). [1) 0; 2) 414 нэВ]

6.71. Длина волны λ излучаемого атомом фотона составляет

0,6 мкм. Принимая время жизни возбужденного состоя- ния $\Delta t = 10^{-8}$ с, определить отношение естественной ширины энергетического уровня, на который был воз- бужден электрон, к энергии, излученной атомом. $[\Delta E/E = \lambda/(c\Delta t) = 2 \cdot 10^{-7}]$

6.72. Принимая, что электрон находится внутри атома диа- метром 0,3 нм, определить (в электрон-вольтах) неоп- ределенность энергии этого электрона. $[\Delta E = h^2/[2m(\Delta x)^2] = 16{,}7$ эВ$]$

6.73. Объяснить, почему физический смысл имеет не сама Ψ-функция, а квадрат ее модуля $|\Psi|^2$.

6.74. Объяснить, почему волновая функция должна быть конечной, однозначной и непрерывной.

6.75. Записать выражение для вероятности W обнаружения частицы в конечном объеме V, если известна коорди- натная пси-функция частицы $\psi(x, y, z)$.

6.76. Волновая функция, описывающая некоторую частицу, может быть представлена в виде $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i(E/\hbar)t}$. Показать, что плотность вероятности нахождения час- тицы определяется только координатной ψ-функцией.

6.77. ψ-Функция некоторой частицы имеет вид $\psi = \dfrac{A}{r}e^{-r/a}$, где r — расстояние этой частицы до силового центра; a — некоторая постоянная. Используя условие норми- ровки вероятностей, определить нормировочный коэф- фициент A. $[A = 1/\sqrt{2\pi a}]$

6.78. Используя условие нормировки вероятностей, опреде- лить нормировочный коэффициент A волновой функции $\psi(r) = Ae^{-r/a}$, описывающей основное состояние элек- трона в атоме водорода, где r — расстояние электрона от ядра; a — первый боровский радиус. $[A = 1/\sqrt{\pi a^3}]$

6.79. Используя условие нормировки вероятностей, опреде- лить нормировочный коэффициент волновой функции $\psi(r) = Ae^{-r^2/(2a^2)}$, описывающей поведение некоторой частицы, где r — расстояние частицы от силового цент- ра; a — некоторая постоянная. $[A = 1/\sqrt{\pi^{3/2}a^3}]$

6.80. Волновая функция $\psi = A\sin(2\pi x/l)$ определена только в области $0 \leqslant x \leqslant l$. Используя это условие нормировки, определить нормировочный множитель A. $[A = \sqrt{2/l}]$

6.81. ψ-Функция некоторой частицы имеет вид $\psi = \dfrac{A}{r}e^{-r/a}$, где r — расстояние этой частицы до силового центра; a — некоторая постоянная. Определить среднее рас- стояние $\langle r \rangle$ частицы до силового центра. $[\langle r \rangle = a/2]$

6.82. Волновая функция, описывающая некоторую частицу, имеет вид $\psi(r) = Ae^{-r^2/(2a^2)}$, где r — расстояние части- цы до силового центра; a — некоторая постоянная. Определить среднее расстояние $\langle r \rangle$ частицы до сило- вого центра. $[\langle r \rangle = 2a/\sqrt{\pi}]$

6.83. Волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi(r) = Ae^{-r/a}$, где r — расстояние электрона от ядра, a — первый боровский радиус. Определить среднее значение квад- рата расстояния $\langle r^2 \rangle$ электрона до ядра в основном состоянии. $[\langle r^2 \rangle = 3a^2]$

6.84. Волновая функция, описывающая некоторую частицу, имеет вид $\psi(r) = (A/r)e^{-r^2/a^2}$, где A — нормировочный множитель, равный $1/\sqrt{\pi a\sqrt{2\pi}}$; r — расстояние части- цы от силового центра; a — некоторая постоянная. Определить среднее значение квадрата расстояния $\langle r^2 \rangle$ частицы до силового центра. $[\langle r^2 \rangle = a^2/4]$

6.85. Волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi(r) = Ae^{-r/a}$, где r — расстояние электрона до ядра; a — первый боровский радиус. Определить наиболее вероятное расстояние $r_в$ электрона до ядра. $[r_в = a]$

6.86. Волновая функция, описывающая некоторую частицу, имеет вид $\psi(r) = Ae^{-r^2/(2a^2)}$, где r — расстояние части- цы от силового центра; a — некоторая постоянная. Определить наиболее вероятное расстояние $r_в$ частицы до силового центра. $[r_в = a]$

6.87. Записать уравнение Шредингера для стационарных состояний электрона, находящегося в атоме водорода.

6.88. Записать одномерное уравнение Шредингера (для стационарных состояний) для частицы, движущейся под действием квазиупругой силы.

6.89. Записать общее уравнение Шредингера для свободной частицы, движущейся вдоль оси x, и решить это урав- нение.

6.90. Исходя из принципов классического детерминизма и причинности в квантовой механике, объяснить толко- вание причинности в классической и квантовой тео- риях.

6.91. Известно, что свободная квантовая частица описы- вается плоской монохроматической волной де Бройля. Плотность вероятности (вероятность, отнесенная к единице объема) обнаружения свободной частицы $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^* = |A|^2 = \text{const}$. Объяснить, что́ означает постоянство этой величины.

6.92. Записать уравнение Шредингера для стационарных состояний для свободной частицы, движущейся вдоль оси x, а также определить посредством его решения собственные значения энергии. Что можно сказать об энергетическом спектре свободной частицы? $[E = \hbar^2k^2/(2m)]$

6.93. Волновая функция, описывающая свободную частицу в момент времени $t=0$, имеет вид $\Psi(x,\ 0) = A \times \times e^{-x^2/a^2 + ikx}$, где a и k — некоторые положительные постоянные. Определить: 1) нормировочный коэффициент A; 2) область, в которой частица локализована. [1) $A = \sqrt{2/(a\sqrt{\pi})}$; 2) $0 < x < a$]

6.94. Частица находится в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной l с бесконечно высокими «стенками». Записать уравнение Шредингера в пределах «ямы» $(0 \leqslant x \leqslant l)$ и решить его. $[\psi(x) = A\sin kx$, где $k = \pi n/l]$

6.95. Частица находится в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной l с бесконечно высокими «стенками». Вывести выражение для собственных значений энергии E_n. $[E_n = n^2\pi^2\hbar^2/(2ml^2)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)]$

6.96. Волновая функция, описывающая состояние частицы в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками», имеет вид $\psi(x) = A\sin kx$. Определить: 1) вид собственной волновой функции $\psi_n(x)$; 2) коэффициент A, исходя из условия нормировки вероятностей. [1) $\psi_n(x) = A\sin(n\pi x/l)$; 2) $A = \sqrt{2/l}$]

6.97. Известно, что нормированная собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками», имеет вид $\psi_n(x) = \sqrt{2/l} \times \times \sin\frac{\pi n}{l}x$, где l — ширина «ямы». Определить среднее значение координаты $\langle x \rangle$ электрона. $[\langle x \rangle = l/2]$

6.98. Доказать, что собственные волновые функции, описывающие состояние частицы в одномерной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками», являются ортогональными, т. е. удовлетворяют условию $\int\limits_0^l \psi_n(x) \times \times \psi_m(x)dx = 0$, если $n \neq m$. Здесь l — ширина «ямы»; n и m — целые числа.

6.99. Частица в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной l с бесконечно высокими «стенками» находится в основном состоянии. Определить вероятность обнаружения частицы в левой трети «ямы». [0,195]

6.100. Частица в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной l с бесконечно высокими «стенками» находится в возбужденном состоянии $(n = 2)$. Определить вероятность обнаружения частицы в области $^3/_8 l \leqslant x \leqslant {}^5/_8 l$. [0,091]

6.101. Электрон находится в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной l с бесконечно высокими «стенками». Определить вероятность W обнаружения электрона в средней трети «ямы», если электрон находится в возбужденном состоянии $(n = 3)$. Пояснить физический смысл полученного результата, изобразив графически плотность вероятности обнаружения электрона в данном состоянии. [1/3]

6.102. Частица в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной l с бесконечно высокими «стенками» находится в возбужденном состоянии $(n = 3)$. Определить, в каких точках «ямы» $(0 \leqslant x \leqslant l)$ плотность вероятности обнаружения частицы: 1) максимальна; 2) минимальна. Пояснить полученный результат графически. [1) $l/6$, $l/2$, $5l/6$; 2) $l/3$, $2l/3$]

6.103. Определить, при какой ширине одномерной прямоугольной «потенциальной ямы» с бесконечно высокими «стенками» дискретность энергетического спектра электрона сравнима с его средней кинетической энергией при температуре T. $[l = \hbar\pi/\sqrt{(2n+1)/(3mkT)}]$

6.104. Доказать, что энергия свободных электронов в металле не квантуется. Принять, что ширина l прямоугольной «потенциальной ямы» с бесконечно высокими «стенками» для электрона в металле составляет 10 см. $[\Delta E_n \approx 0{,}75n \cdot 10^{-16}$ эВ$]$

6.105. Частица находится в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками». Определить, во сколько раз изменяется отношение разности соседних энергетических уровней $\Delta E_{n+1,n}/\Delta E_n$ частицы при переходе от $n = 3$ к $n' = 8$. Объяснить физическую сущность полученного результата. [Уменьшается в 3 раза]

6.106. Частица с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой U и конечной шириной l (рис. 108), причем $E < U$. Записать уравнение Шредингера для областей *1*, *2* и *3*.

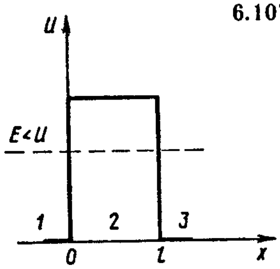


Рис. 108

6.107. Для условия задачи 6.106 записать решения уравнений Шредингера для областей *1*, *2* и *3* (рис. 108). ψ-Функция обычно нормируется так, что $A_1 = 1$. Представить графически качественный вид найденных функций. [$\psi_1(x) = e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$, $\psi_2(x) = A_2 e^{-\beta x} + B_2 e^{\beta x}$, $\psi_3(x) = A_3 e^{ikx}$, где $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\beta = \sqrt{2m(U-E)}/\hbar$]

6.108. Электрон с энергией $E = 4$ эВ движется в положительном направлении оси x, встречая на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 10$ эВ и шириной $l = 0{,}1$ нм. Определить коэффициент D прозрачности потенциального барьера. [0,1]

6.109. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $l = 0{,}1$ нм. Определить в электрон-вольтах разность энергий $U - E$, при которой вероятность прохождения электрона сквозь барьер составит 0,5. [0,454 эВ]

6.110. Протон с энергией $E = 5$ эВ движется в положительном направлении оси x, встречая на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 10$ эВ и шириной $l = 0{,}1$ нм. Определить: 1) вероятность прохождения протоном этого барьера; 2) во сколько раз надо сузить барьер, чтобы вероятность прохождения его протоном была такой же, как для электрона при вышеприведенных условиях. [1) $1{,}67 \cdot 10^{-43}$; 2) в 42,9 раза]

6.111. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $l = 0{,}1$ нм. Разность между высотой потенциального барьера и энергией движущегося в положительном направлении оси x электрона $U - E = 5$ эВ. Определить, во сколько раз изменится коэффициент D прозрачности потенциального барьера для электрона, если разность $U - E$ возрастет в 4 раза. [Уменьшится в 10 раз]

6.112. Частица с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой U (рис. 109), причем $E > U$. Записать уравнение Шредингера для областей *1* и *2*.

6.113. Для условия задачи 6.112 записать решение уравнений Шредингера для областей *1* и *2* (рис. 109). ψ-Функция обычно нормируется так, что $A_1 = 1$. Представить графически качественный вид найденных функций. [$\psi_1(x) = e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}$, $\psi_2 = A_2 e^{ik_1x}$, где $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$; $k_2 = \sqrt{2m(E-U)}/\hbar$]

6.114. Частица с энергией $E = 10$эВ движется в положительном направлении оси x, встречая на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 5$ эВ (см. рис. 109). Определить коэффициент преломления n волн де Бройля на границе потенциального барьера. [$n = \sqrt{1 - U/E} = 0{,}707$]

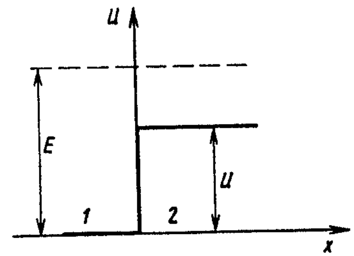


Рис. 109

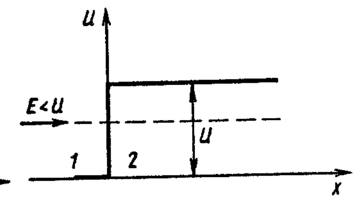


Рис. 110

6.115. Электрон с длиной волны де Бройля $\lambda_1 = 100$ пм, двигаясь в положительном направлении оси x, встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный барьер высотой $U = 100$ эВ. Определить длину волны де Бройля после прохождения барьера. [$\lambda_2 = \lambda_1/\sqrt{(E-U)/E} = 172$ пм]

6.116. Частица с энергией $E = 50$ эВ, двигаясь в положительном направлении оси x, встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 20$ эВ. Определить вероятность отражения электрона от этого барьера. [$W = 0{,}016$]

6.117. Частица массой $m = 10^{-19}$ кг, двигаясь в положительном направлении оси x со скоростью $v = 20$ м/с, встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 100$ эВ. Определить коэффициент отражения R волн де Бройля на границе потенциального барьера. [$R = 0{,}146$]

6.118. Частица с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой U (рис. 110), причем $E<U$. Записать уравнение Шредингера для областей *1* и *2*.

6.119. Для условия задачи 6.118 записать решение уравнений Шредингера для областей *1* и *2* (рис. 110). ψ-Функция обычно нормируется так, что $A_1=1$. Представить графически качественный вид найденных функций. $[\psi_1(x)=e^{ik_1x}+B_1e^{-ik_1x}$, $\psi_2=A_2\,e^{-\beta x}$, где $k_1=\sqrt{2mE}/\hbar$ и $\beta=\sqrt{2m(U-E)}/\hbar]$

6.120. Электрон с длиной волны λ де Бройля, равной 120 пм, движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой $U=200$ эВ. Определить коэффициент отражения R волн де Бройля на границе потенциального барьера. $[R=1]$

6.121. Частица с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой U, причем $E<U$ (рис. 110). Принимая $A_1=1$ (как это обычно делается) и воспользовавшись условиями непрерывности волновой функции и ее первой производной на границе областей *1* и *2*, определить плотность вероятности $|\psi_2(0)|^2$ обнаружения частицы в точке $x=0$ области *2*. $[|\psi_2(0)|^2=4E/U]$

6.122. Частица с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой U, причем $E<U$ (рис. 110). Принимая $A_1=1$ (как это обычно делается) и воспользовавшись условиями непрерывности волновой функции и ее первой производной на границе областей *1* и *2*, определить плотность вероятности обнаружения частицы на расстоянии x от потенциального барьера. $\left[|\psi_2(x)|^2=\left|\frac{2k_1}{k_1+i\beta}\right|^2\exp\left[-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U-E)}\,x\right],\quad \text{где}\quad k_1=\sqrt{2mE}/\hbar \text{ и } \beta=\sqrt{2m(U-E)}/\hbar\right]$

6.123. Доказать, что волновая функция $\psi(x)=Axe^{-\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}x^2}$ может быть решением уравнения Шредингера для гармонического осциллятора, масса которого m и постоянная квазиупругой силы k. Определить собственное значение полной энергии осциллятора. $\left[E=\frac{3}{2}\hbar\omega_0\right]$

6.124. Частица массой m движется в одномерном потенциальном поле $U(x)=kx^2/2$ (гармонический осциллятор). Волновая функция, описывающая поведение частицы в основном состоянии, имеет вид $\psi(x)=Ae^{-ax^2}$, где A — нормировочный коэффициент; a — положительная постоянная. Используя уравнение Шредингера, определить: 1) постоянную a; 2) энергию частицы в этом состоянии. $[1)\ a=\sqrt{mk}/(2\hbar)=m\omega_0/(2\hbar)$; 2) $E=\hbar\omega_0/2$, где $\omega_0=\sqrt{k/m}]$

6.125. Объяснить физический смысл существования энергии нулевых колебаний для квантового гармонического осциллятора. Зависит ли наличие нулевых колебаний от формы «потенциальной ямы»?

6.126. Математический маятник можно рассматривать в качестве гармонического осциллятора. Определить в электрон-вольтах энергию нулевых колебаний для маятника длиной $l=1$ м, находящегося в поле тяготения Земли. $[1{,}03\cdot10^{-15}$ эВ$]$

6.127. Рассматривая математический маятник массой $m=100$ г и длиной $l=0{,}5$ м в виде гармонического осциллятора, определить классическую амплитуду A маятника, соответствующую энергии нулевых колебаний этого маятника. $[A=\sqrt{(\hbar\sqrt{l/g})/m}=1{,}54\times10^{-17}$ м$]$

6.3. Элементы современной физики атомов и молекул

Основные законы и формулы

- Потенциальная энергия $U(r)$ взаимодействия электрона с ядром в водородоподобном атоме

$$U(r)=-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где r — расстояние между электроном и ядром; Z — порядковый номер элемента; ε_0 — электрическая постоянная.

- Собственное значение энергии E_n электрона в водородоподобном атоме

$$E_n=-\frac{1}{n^2}\frac{Z^2me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

- Энергия ионизации атома водорода

$$E_i=-E_1=\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}.$$

● Момент импульса (механический орбитальный момент) электрона

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)},$$

где l — орбитальное квантовое число, принимающее при заданном n следующие значения: $l = 0, 1, \ldots, n-1$ (всего n значений).

● Проекция момента импульса на направление z внешнего магнитного поля

$$L_{lz} = \hbar m_l,$$

где m_l — магнитное квантовое число, принимающее при заданном l следующие значения: $m_l = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$ (всего $(2l+1)$ значений).

● Правила отбора для орбитального и магнитного квантовых чисел

$$\Delta l = \pm 1 \text{ и } \Delta m_l = 0, \pm 1.$$

● Нормированная волновая функция, отвечающая $1s$-состоянию (основному состоянию) электрона в атоме водорода,

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a},$$

где $a = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(me^2)$ — величина, совпадающая с первым боровским радиусом.

● Вероятность обнаружить электрон в атоме водорода, находящемся в $1s$-состоянии, в интервале от r до $r + dr$

$$dW = |\psi_{100}|^2 dV = |\psi_{100}|^2 \cdot 4\pi r^2 dr.$$

● Спин (собственный механический момент импульса) электрона

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)},$$

где s — спиновое квантовое число ($s = 1/2$).

● Проекция спина на направление z внешнего магнитного поля

$$L_{sz} = \hbar m_s,$$

где m_s — магнитное спиновое квантовое число ($m_s = \pm 1/2$).

● Принцип Паули

$$Z(n, l, m_l, m_s) = 0 \text{ или } 1,$$

где $Z(n, l, m_l, m_s)$ — число электронов, находящихся в квантовом состоянии, описываемом набором четырех квантовых чисел: n — главного, l — орбитального, m_l — магнитного, m_s — магнитного спинового.

● Максимальное число электронов $Z(n)$, находящихся в состояниях, определяемых данным главным квантовым числом n,

$$Z(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2.$$

● Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра

$$\lambda_{\min} = ch/(eU),$$

где e — заряд электрона; U — разность потенциалов, приложенная к рентгеновской трубке.

● Закон Мозли, определяющий частоты спектральных линий характеристического рентгеновского излучения,

$$\nu = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где R — постоянная Ридберга; Z — порядковый номер элемента в периодической системе; σ — постоянная экранирования, m определяет рентгеновскую серию ($m = 1, 2, 3, \ldots$); n определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m+1, m+2, \ldots$).

● Закон Мозли для линии K_α ($\sigma = 1$)

$$\nu = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right).$$

Примеры решения задач

Задача 7. Нормированная волновая функция, описывающая $1s$-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, где r — расстояние электрона от ядра; a — первый боровский радиус. Определить вероятность W обнаружения электрона в атоме внутри сферы радиусом $r = 0{,}05a$.

Дано: $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, $r = 0{,}05\,a$.

Определить W.

Решение. ψ-Функция, описывающая $1s$-состояние электрона в атоме водорода, сферически-симметрична (зависит только от r). Поэтому элемент объема, отвечающий одинаковой плотности вероятности, выбирают в виде объема сферического слоя радиусом r и толщиной dr: $dV = 4\pi r^2 dr$.

Вероятность обнаружить электрон в элементе объема dV

$$dW = |\psi_{100}(r)|^2 dV = \left|\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}\right|^2 4\pi r^2 dr.$$

Вероятность W найдем, интегрируя dW в пределах от $r_1 = 0$ до $r_2 = 0{,}05\,a$:

$$W = \frac{4}{a^3}\int_0^{0{,}05a} r^2 e^{-2r/a} dr. \qquad (1)$$

По условию задачи, r мало ($r_{\max} = 0{,}05a$; $a = 52{,}8$ пм), поэтому сомножитель $e^{-2r/a}$ можно разложить в ряд

$$e^{-2r/a} = 1 - \frac{2r}{a} + \frac{1}{2!}\left(\frac{2r}{a}\right)^2 - \ldots . \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1) и пренебрегая в (2) членами второго порядка, получим

$$W = \frac{4}{a^3}\int_0^{0{,}05a} r^2\left(1 - \frac{2r}{a}\right)\mathrm{d}r = \frac{4}{a^3}\left[\int_0^{0{,}05a} r^2\mathrm{d}r - \frac{2}{a}\int_0^{0{,}05a} r^3\mathrm{d}r\right] =$$

$$= \frac{4}{a^3}\left[\frac{r^3}{3}\Big|_0^{0{,}05a} - \frac{2}{a}\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^{0{,}05a}\right] = 1{,}54\cdot10^{-4}.$$

Таким образом, $W = 1{,}54\cdot10^{-4}$.

Задача 8. Электрон в атоме находится в d-состоянии. Определить: 1) момент импульса электрона; 2) максимальное значение проекции момента импульса на направление внешнего магнитного поля.

Д а н о d-состояние.

О п р е д е л и т ь: 1) L_l; 2) $(L_{lz})_{\max}$.

Р е ш е н и е. d-Состояние электрона характеризуется орбитальным квантовым числом $l = 2$, а момент импульса (механический орбитальный момент) электрона

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)},$$

где $\hbar = 1{,}05\cdot10^{-14}$ Дж·с — постоянная Планка.

Проекция момента импульса на направление z внешнего магнитного поля

$$L_{lz} = \hbar m_l, \qquad (1)$$

где $m_l = 0, \pm1, \ldots, \pm l$ — магнитное квантовое число. Выражение (1) максимально при $m_l = (m_l)_{\max}$:

$$(L_{lz})_{\max} = \hbar (m_l)_{\max},$$

где, по условию задачи, $(m_l)_{\max} = 2$.

Вычисляя, получим: 1) $L_l = 2{,}45\hbar$; 2) $(L_{lz})_{\max} = 2\hbar$.

Задача 9. Определить напряжение на рентгеновской трубке с никелевым анодом ($Z = 28$), если разность длин волн $\Delta\lambda$ между K_α-линией и коротковолновой границей сплошного рентгеновского спектра равна 84 пм.

Д а н о: $Z = 28$, $\Delta\lambda = \lambda_\alpha - \lambda_{\min} = 84$ пм $= 8{,}4\cdot10^{-11}$ м.

О п р е д е л и т ь U.

Р е ш е н и е. Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра

$$\lambda_{\min} = ch/(eU), \qquad (1)$$

где c — скорость света в вакууме; h — постоянная Планка; e — заряд электрона. По условию задачи, $\lambda_{\min} = \lambda_\alpha - \Delta\lambda$.

Согласно закону Мозли, для линии K_α

$$\nu_\alpha = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}R(Z-1)^2,$$

откуда

$$\lambda_\alpha = \frac{c}{\nu_\alpha} = \frac{4c}{3R(Z-1)^2} = \frac{4}{3R'(Z-1)^2},$$

где $R' = R/c = 1{,}1\cdot10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга. Тогда

$$\lambda_{\min} = \frac{4}{3R'(Z-1)^2} - \Delta\lambda. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем искомое напряжение на рентгеновской трубке:

$$U = \frac{ch}{e\left(\frac{4}{3R'(Z-1)^2} - \Delta\lambda\right)},$$

где $c = 3\cdot10^8$ м/с, $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Вычисляя, получим $U = 15{,}1$ кВ.

Задачи

6.128. Представить: 1) уравнение Шредингера для стационарных состояний электрона, находящегося в атоме водорода; 2) собственные значения энергии, удовлетворяющие уравнению; 3) график потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром; 4) возможные дискретные значения энергии на этом графике.

6.129. Как известно, уравнению Шредингера, описывающему атом водорода, удовлетворяют собственные функции $\psi_{nlm_l}(r, \vartheta, \varphi)$, определяемые тремя квантовыми числами: главным n, орбитальным l и магнитным m_l. Объяснить физический смысл указанных квантовых чисел и записать их возможные значения.

6.130. Волновая функция $\psi_{nlm_l}(r, \vartheta, \varphi)$, описывающая атом водорода, определяется главным квантовым числом n, орбитальным квантовым числом l и магнитным квантовым числом m_l. Определить, чему равно число различных состояний, соответствующих данному n. $[n^2]$

6.131. Записать возможные значения орбитального квантового числа l и магнитного квантового числа m_l для главного квантового числа $n = 4$.

6.132. Определить, сколько различных волновых функций соответствует главному квантовому числу $n = 3$.

6.133. Учитывая число возможных состояний, соответствующих данному главному квантовому числу n, а также правила отбора, представить на энергетической диаграмме спектральные линии атома водорода, образующие серии Лаймана и Бальмера.

6.134. Показать возможные энергетические уровни атома с электроном в состоянии с главным квантовым числом $n = 6$, если атом помещен во внешнее магнитное поле.

6.135. Построить и объяснить диаграмму, иллюстрирующую расщепление энергетических уровней и спектральных линий (с учетом правил отбора) при переходах между состояниями с $l = 2$ и $l = 1$. [$d \to p$-переход]

6.136. Построить и объяснить диаграмму, иллюстрирующую расщепление энергетических уровней и спектральных линий при переходах между состояниями с $l = 1$ и $l = 0$. [$p \to s$-переход]

6.137. Волновая функция, описывающая $1s$-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi = Ce^{-r/a}$, где r — расстояние электрона от ядра; a — первый боровский радиус. Определить нормированную волновую функцию, отвечающую этому состоянию. [$\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$]

6.138. Предполагая, что нормированная волновая функция, описывающая $1s$-состояние электрона в атоме водорода, известна (см. задачу 6.137), определить среднее значение функции $1/r$, принимая во внимание, что

$$\langle 1/r \rangle = \int_0^\infty \frac{1}{r}\psi^*\psi \, dV \Big/ \int_0^\infty \psi^*\psi \, dV. \quad [\langle 1/r \rangle = 1/a]$$

6.139. Нормированная волновая функция, описывающая $1s$-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, где r — расстояние электрона от ядра; a — первый боровский радиус. Определить: 1) вероятность dW обнаружения электрона на расстоянии от r до $r + dr$ от ядра, 2) расстояния от ядра, на которых электрон может быть обнаружен с наибольшей вероятностью. $\left[\ 1)\ dW = \dfrac{4}{a^3} r^2 e^{-2r/a} dr;\ 2)\ r_{\max} = a \right]$

6.140. Нормированная волновая функция, описывающая $1s$-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, где r — расстояние электрона от ядра; a — первый боровский радиус. Определить среднее значение потенциальной энергии электрона в поле ядра. [$\langle U \rangle = -e^2/(4\pi\varepsilon_0 a)$]

6.141. Нормированная волновая функция, описывающая $1s$-состояние в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, где r — расстояние электрона от ядра; a — первый боровский радиус. Определить среднее значение модуля кулоновской силы, действующей на электрон. [$\langle F \rangle = e^2/(2\pi\varepsilon_0 a^2)$]

6.142. Электрон в атоме находится в f-состоянии. Определить возможные значения (в единицах $\hbar$) проекции момента импульса L_{lz} орбитального движения электрона в атоме на направление внешнего магнитного поля.

6.143. Электрон в атоме находится в d-состоянии. Определить: 1) момент импульса (орбитальный) L_l электрона; 2) максимальное значение проекции момента импульса $(L_{lz})_{\max}$ на направление внешнего магнитного поля. [1) $2{,}45\hbar$; 2) $2\hbar$]

6.144. Определить, во сколько раз орбитальный момент импульса L_l электрона, находящегося в f-состоянии, больше, чем для электрона в p-состоянии. [В 2,45 раза]

6.145. 1-s электрон атома водорода, поглотив фотон с энергией $E = 12{,}1$ эВ, перешел в возбужденное состояние с максимально возможным орбитальным квантовым числом. Определить изменение момента импульса ΔL_l орбитального движения электрона. [$2{,}57 \cdot 10^{-34}$ Дж·с]

6.146. Объяснить, почему в опыте Штерна и Герлаха по обнаружению собственного механического момента импульса (спина) электрона использовался пучок атомов водорода, заведомо находящихся в s-состоянии.

6.147. Объяснить, почему в опыте Штерна и Герлаха по обнаружению собственного механического момента импульса (спина) электрона использовалось неоднородное магнитное поле.

6,148. Определить числовое значение: 1) собственного механического момента импульса (спина) L_s; 2) проекцию спина L_{sz} на направление внешнего магнитного поля. [1) $9{,}09 \cdot 10^{-35}$ Дж·с; 2) $5{,}25 \cdot 10^{-35}$ Дж·с]

6.149. Объяснить, что лежит в основе классификации частиц на фермионы и бозоны, а также которые из них описываются симметричными волновыми функциями.

6.150. Исходя из принципа неразличимости тождественных частиц, дать определение симметричной и антисимметричной волновых функций. Объяснить, почему изменение знака волновой функции не влечет за собой изменение состояния.

6.151. Учитывая принцип Паули, определить максимальное число электронов, находящихся в состояниях, определяемых данным главным квантовым числом.

6.152. Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число $n = 3$. Определить число электронов в этой оболочке, которые имеют одинаковые следующие квантовые числа: 1) $m_s = -1/2$; 2) $m_l = 0$; 3) $m_l = -1$, $m_s = 1/2$. [1) 9; 2) 6; 3) 2]

6.153. Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число $n = 4$. Определить число электронов в этой оболочке, которые имеют одинаковые следующие квантовые числа: 1) $m_l = -3$; 2) $m_s = 1/2$, $l = 2$; 3) $m_s = -1/2$, $m_l = 1$. [1) 2; 2) 5; 3) 3]

6.154. Определить суммарное максимальное число s-, p-, d-, f- и g-электронов, которые могут находиться в N- и O-оболочках атома. [82]

6.155. Записать квантовые числа, определяющие внешний, или валентный, электрон в основном состоянии атома натрия.

6.156. Пользуясь Периодической системой элементов Д. И. Менделеева, записать символически электронную конфигурацию следующих атомов в основном состоянии: 1) неона; 2) аргона; 3) криптона.

6.157. Пользуясь Периодической системой элементов Д. И. Менделеева, записать символически электронную конфигурацию атома меди в основном состоянии.

6.158. Пользуясь Периодической системой элементов Д. И. Менделеева, записать символически электронную конфигурацию атома цезия в основном состоянии.

6.159. Электронная конфигурация некоторого элемента $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p$. Определить, что это за элемент.

6.160. Электронная конфигурация некоторого элемента $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s$. Определить, что это за элемент.

6.161. Определить в Периодической системе элементов Д. И. Менделеева порядковый номер элемента, у которого в основном состоянии заполнены K, L, M-оболочки, а также $4s$-подоболочка.

6.162. Объяснить: 1) почему тормозной рентгеновский спектр является сплошным; 2) почему сплошной рентгеновский спектр имеет резкую границу со стороны коротких волн и чем определяется ее положение.

6.163. Определить наименьшую длину волны рентгеновского излучения, если рентгеновская трубка работает при напряжении $U = 150$ кВ. [8,29 пм]

6.164. Минимальная длина волны рентгеновских лучей, полученных от трубки, работающей при напряжении $U = 60$ кВ, равна 20,7 пм. Определить по этим данным постоянную Планка. [$6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с]

6.165. Определить длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость v электронов, бомбардирующих анод рентгеновской трубки, составляет $0{,}8\,c$. [3,64 пм]

6.166. Определить длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если при увеличении напряжения на рентгеновской трубке в два раза она изменилась на 50 пм. [100 пм]

6.167. Определить порядковый номер элемента в Периодической системе элементов Д. И. Менделеева, если граничная частота K-серии характеристического рентгеновского излучения составляет $5{,}55 \cdot 10^{18}$ Гц. [42, молибден]

6.168. Определить порядковый номер элемента в Периодической системе элементов Д. И. Менделеева, если длина волны λ линии K_α характеристического рентгеновского излучения составляет 72 пм. [42, молибден]

6.169. Определить длину волны самой длинноволновой линии K-серии характеристического рентгеновского спектра, если анод рентгеновской трубки изготовлен из платины. Постоянную экранирования принять равной единице. [20,4 пм]

6.170. Определить постоянную экранирования σ для L-серии рентгеновского излучения, если при переходе электрона в атоме вольфрама с M-оболочки на L-оболочку длина волны λ испущенного фотона составляет 140 пм. [5,63]

6.171. В атоме вольфрама электрон перешел с M-оболочки на L-оболочку. Принимая постоянную экранирования $\sigma = 5{,}63$, определить энергию испущенного фотона. [8,88 кэВ]

6.172. Известно, что в спектре комбинационного рассеяния помимо несмещенной спектральной линии возникают стоксовы (или красные) и антистоксовы (или фиолетовые) спутники. Объяснить механизм их возникновения и их свойства.

6.173. Объяснить механизм возникновения, свойства и особенности вынужденного (индуцированного) излучения.

6.174. Объяснить, почему для создания состояний с инверсией населенностей необходима накачка.

6.175. Объяснить, почему активные среды, используемые в оптических квантовых генераторах, рассматриваются в качестве сред с отрицательным коэффициентом поглощения.

6.176. Объяснить, какие три компонента обязательно содержит оптический квантовый генератор (лазер) и каковы их назначения.

6.177. Перечислить и прокомментировать основные свойства лазерного излучения.

6.4. Элементы квантовой статистики

Основные законы и формулы

● Распределение Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/(kT)}-1} \quad \text{и} \quad \langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/(kT)}+1},$$

где $\langle N_i \rangle$ — соответственно средние числа бозонов и фермионов в квантовом состоянии с энергией E_i; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура; μ — химический потенциал. При $e^{(E_i-\mu)/(kT)} \gg 1$ оба распределения переходят в классическое распределение Максвелла — Больцмана $\langle N_i \rangle = A\,e^{-E_i/(kT)}$, где $A = e^{\mu/(kT)}$.

● Распределение Ферми — Дирака по энергиям для свободных электронов в металле

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(kT)}+1},$$

где E_F — энергия Ферми.

При $T = 0$ К

$$\langle N(E) \rangle = \begin{cases} 1 \text{ при } E < E_F, \\ 0 \text{ при } E > E_F. \end{cases}$$

● Характеристическая температура Дебая (при $T \ll T_D$)

$$T_D = \hbar\omega_D/k,$$

где ω_D — предельная частота упругих колебаний кристаллической решетки.

● Электрическая проводимость металла, согласно квантовой теории электропроводности металлов,

$$\gamma = \frac{ne^2\langle l_F \rangle}{m\langle u_F \rangle},$$

где n — концентрация электронов проводимости в металле; $\langle l_F \rangle$ — средняя длина свободного пробега электрона, имеющего энергию Ферми; $\langle u_F \rangle$ — средняя скорость теплового движения такого электрона.

Примеры решения задач

Задача 10. Определить в электрон-вольтах максимальную энергию фотона, который может возбуждаться в кристалле золота, если характеристическая температура Дебая для него $T_D = 180$ К. Какова была бы длина волны фотона, обладающего такой энергией? Считать $T \ll T_D$.

Дано: $T \ll T_D$, $T_D = 180$ К.

Определить: E_{max}; λ.

Решение. В области температур $T \ll T_D$ максимальная энергия фонона

$$E_{max} = \hbar\omega_D = kT_D,$$

где $\hbar = h/(2\pi)$ — постоянная Планка; ω_D — предельная частота упругих колебаний кристаллической решетки; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

Так как

$$E_{max} = h\nu = hc/\lambda,$$

то искомая длина волны

$$\lambda = hc/E_{max}.$$

Вычисляя, получаем $E_{max} = 2{,}48 \cdot 10^{-21}$ Дж $= 15{,}5$ мэВ; $\lambda = 80{,}1$ мкм.

Задачи

6.178. Объяснить отличие бозе-газа от ферми-газа, а также обоих этих газов от классического газа.

6.179. Показать, что при очень малом параметре вырождения распределения Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака переходят в распределение Максвелла — Больцмана.

6.180. Пользуясь распределениями Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака, получить распределение Максвелла — Больцмана.

6.181. Объяснить, при каких условиях к электронам в металле применима: 1) классическая статистика; 2) квантовая статистика.

6.182. Объяснить, при каких условиях можно применять статистику Максвелла — Больцмана к электронам в металле. Пользуясь распределением Ферми — Дирака, получить распределение Максвелла — Больцмана.

6.183. Определить функцию распределения для электронов, находящихся на энергетическом уровне E для случая $E - E_F \ll kT$, пользуясь: 1) статистикой Ферми — Дирака; 2) статистикой Максвелла — Больцмана. [1) 1/2; 2) 1]

6.184. Определить функцию распределения Ферми — Дирака при $T \neq 0$ К для электронов, находящихся на уровне Ферми. Объяснить полученный результат. [$\langle N(E) \rangle = 1/2$]

6.185. Объяснить физический смысл энергии Ферми.

6.186. Объяснить, почему работу выхода электрона из металла следует отсчитывать от уровня Ферми, а не от дна «потенциальной ямы», как это делается в классической теории.

6.187. Определить число свободных электронов, занимающих в среднем уровень энергии, равной энергии Ферми.

6.188. Объяснить на основе квантовой теории отсутствие заметного отличия в теплоемкостях металлов и диэлектриков.

6.189. Объяснить целесообразность введения фононов, а также перечислить их свойства.

6.190. Какая статистика описывает фононный газ? Почему?

6.191. Определить в электрон-вольтах максимальную энергию E фонона, который может возбуждаться в кристалле NaCl, характеризуемом температурой Дебая $T_D = 320$ К. Фотон какой длины волны λ обладал бы такой энергией? ($E = 0{,}028$ эВ; $\lambda = 45$ мкм).

6.192. Сравнить выражения для удельной электрической проводимости металла по классической и квантовой теории и объяснить, чем отличаются они по физическому содержанию.

6.193. Объяснить причину электрического сопротивления металлов с точки зрения квантовой теории электропроводности металлов.

6.5. Элементы физики твердого тела

Основные законы и формулы

- Концентрация электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне

$$n_e = C_1 \mathrm{e}^{-(E_2 - E_F)/(kT)} \quad \text{и} \quad n_p = C_2 \mathrm{e}^{(E_1 - E_F)/(kT)},$$

где E_2 — энергия, соответствующая дну зоны проводимости; E_1 — энергия, соответствующая верхней границе валентной зоны; E_F — энергия Ферми; T — термодинамическая температура; C_1 и C_2 — постоянные, зависящие от температуры и эффективных масс электронов проводимости и дырок (при равенстве последних $C_1 = C_2$).

- Уровень Ферми в собственном полупроводнике

$$E_F = \Delta E/2,$$

где ΔE — ширина запрещенной зоны.

- Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = \gamma_0 \mathrm{e}^{-\Delta E/(2kT)},$$

где γ_0 — постоянная, характерная для данного полупроводника.

Примеры решения задач

Задача 11. Удельная проводимость кремниевого образца при нагревании от температуры $t_1 = 0$ °С до температуры $t_2 = 18$ °С увеличилась в 4,24 раза. Определить ширину запрещенной зоны кремния.

Дано: $T_1 = 273$ К, $T_2 = 291$ К, $\gamma_1/\gamma_2 = 4{,}24$.

Определить ΔE.

Решение. Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = \gamma_0 \mathrm{e}^{-\Delta E/(2kT)},$$

где γ_0 — постоянная, характерная для данного полупроводника; ΔE — ширина запрещенной зоны.

Тогда

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\mathrm{e}^{-\Delta E/(2kT_1)}}{\mathrm{e}^{-\Delta E/(2kT_2)}} = \exp\left[\frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right]$$

или, прологарифмировав,

$$\ln\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right),$$

откуда искомая ширина запрещенной зоны

$$\Delta E = \frac{2kT_1T_2 \ln(\gamma_1/\gamma_2)}{T_2 - T_1}.$$

Вычисляя, получаем $\Delta E = 1{,}1$ эВ.

Задачи

6.194. Объяснить различие энергетических состояний электронов в кристалле и в изолированном атоме.

6.195. Объяснить образование зонного энергетического спектра в кристалле, показав, что этот эффект — квантово-механический и вытекает из соотношения неопределенностей Гейзенберга.

6.196. Объяснить, как изменится энергетический спектр валентных электронов, если число образующих кристалл атомов увеличить в 3 раза.

6.197. Объяснить различие в электрических свойствах металлов, диэлектриков и полупроводников с точки зрения зонной теории твердого тела.

6.198. Объяснить различие между диэлектриками и полупроводниками с точки зрения зонной теории твердого тела.

6.199. Объяснить различие между металлами и диэлектриками с точки зрения зонной теории твердого тела.

6.200. Объяснить механизм дырочной проводимости собственных полупроводников.

6.201. Объяснить электрические свойства полупроводников с точки зрения зонной теории твердого тела. Как меняется с температурой сопротивление полупроводника — увеличивается или уменьшается? Почему?

6.202. Доказать, что уровень Ферми в собственном полупроводнике действительно расположен в середине запрещенной зоны.

6.203. Германиевый образец нагревают от 0 до 17 °С. Принимая ширину запрещенной зоны кремния $\Delta E = 0{,}72$ эВ, определить, во сколько раз возрастет его удельная проводимость. [В 2,45 раза]

6.204. Определить ширину запрещенной зоны собственного полупроводника, если при температурах T_1 и T_2 $(T_2 > T_1)$ его сопротивления соответственно равны R_1 и R_2. $\left[\Delta E = 2k\frac{T_1T_2}{T_2 - T_1}\ln\frac{R_1}{R_2},\right.$ где k — постоянная Больцмана$\left.\right]$

6.205. Нарисовать зонные схемы полупроводников n-типа и p-типа и объяснить механизм их проводимости.

6.206. В чистый германий введена небольшая примесь мышьяка. Пользуясь Периодической системой элементов Д. И. Менделеева, определить и объяснить тип проводимости примесного германия.

6.207. В чистый кремний введена небольшая примесь бора. Пользуясь Периодической системой элементов Д. И. Менделеева, определить и объяснить тип проводимости примесного кремния.

6.208. Объяснить и нарисовать на зонной схеме положение уровня Ферми для электронного и дырочного полупроводников при 1) 0 К, 2) повышении температуры.

6.209. Пользуясь Периодической системой элементов Д. И. Менделеева, объяснить, какой проводимостью будет обладать германий, если в него ввести небольшую примесь: 1) алюминия; 2) фосфора.

6.210. Объяснить с помощью зонной теории механизмы собственной и примесной фотопроводимости.

6.211. Объяснить, каким образом удалось установить, что люминесцентное излучение не является тепловым.

6.212. Объяснить, по какому признаку удалось установить, что излучение Вавилова—Черенкова не является люминесценцией.

6.213. Какие признаки лежат в основе деления люминесцентного излучения на разные его виды?

6.214. Объяснить с помощью зонной теории механизмы возникновения флуоресценции и фосфоресценции.

6.215. Объяснить на основе зонной теории контакт двух металлов с различными работами выхода.

6.216. Чем объясняется возникновение при контакте двух металлов: 1) внешней контактной разности потенциалов? 2) внутренней контактной разности потенциалов?

6.217. Используя зонную схему, объяснить механизм физических процессов, происходящих при контакте металла с полупроводником n-типа для случаев: 1) $A_м > A$; 2) $A_м < A$ ($A_м$ — работа выхода из металла; A — работа выхода из полупроводника).

6.218. Используя зонную схему, объяснить механизм физических процессов, происходящих при контакте металла с полупроводником p-типа для случаев: 1) $A_м > A$; 2) $A_м < A$ ($A_м$ — работа выхода из металла; A — работа выхода из полупроводника).

6.219. Объяснить, почему возникает запирающий контактный слой при контакте: 1) донорного полупроводника с металлом, если $A < A_м$; 2) акцепторного полупроводника с металлом, если $A > A_м$ ($A_м$ — работа выхода из металла; A — работа выхода из полупроводника).

6.220. Объяснить механизм возникновения для контакта металл — полупроводник пропускного и запорного направлений (для тока).

6.221. Какое направление (и почему) при контакте металл — полупроводник является для тока пропускным, если: 1) внешнее и контактное поля по направлению совпадают; 2) внешнее и контактное поля по направлению противоположны?

6.222. Используя зонную схему, объяснить механизм физических процессов, происходящих в p—n-переходе.

6.223. Какое направление (и почему) в p-n-переходе является для тока пропускным, если: 1) внешнее и контактное поля противоположны по направлению; 2) внешнее и контактное поля по направлению совпадают?

6.224. Объяснить, в каком направлении не могут проходить через запирающий слой контакта полупроводников n- и p-типа: 1) свободные электроны; 2) дырки.

6.225. Объяснить механизм односторонней (вентильной) проводимости p-n-перехода.

6.226. Объяснить принцип устройства и действия полупроводникового триода (транзистора). Сравнить работу транзистора и лампового триода.

λN

7 Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц

7.1. Элементы физики атомного ядра

Основные законы и формулы

- Радиус ядра

$$R = R_0 A^{1/3},$$

где $R_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ м; A — массовое число (число нуклонов в ядре).

- Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{св} = [Zm_p + (A-Z)m_n - m_я]c^2 = [Zm_H + (A-Z)m_n - m]c^2,$$

где m_p, m_n, $m_я$ — соответственно массы протона, нейтрона и ядра; Z — зарядовое число ядра (число протонов в ядре); A — массовое число; $m_H = m_p + m_e$ масса атома водорода (^1_1H); m — масса атома.

- Дефект массы ядра

$$\Delta m = [Zm_p + (A-Z)m_n] - m_я = [Zm_H + (A-Z)m_n] - m.$$

- Удельная энергия связи (энергия связи, отнесенная к одному нуклону)

$$\delta E_{св} = E_{св}/A.$$

- Число ядер, распавшихся в среднем за промежуток времени от t до $t + dt$,

$$dN = -\lambda N dt,$$

где N — число нераспавшихся ядер к моменту времени t; λ — постоянная радиоактивного распада.

- Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N — число нераспавшихся ядер в момент времени t; N_0 — начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени $t = 0$); λ — постоянная радиоактивного распада.

- Число ядер, распавшихся за время t,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}).$$

● Связь периода полураспада $T_{1/2}$ и постоянной радиоактивного распада λ

$$T_{1/2} = (\ln 2)/\lambda.$$

● Связь среднего времени жизни τ радиоактивного ядра и постоянной λ радиоактивного распада

$$\tau = 1/\lambda.$$

● Активность нуклида

$$A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N.$$

● Правила смещения:
для α-распада

$${}^{A}_{Z}X \to {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He;$$

для β^--распада

$${}^{A}_{Z}X \to {}_{Z+1}{}^{A}Y + {}_{-1}^{0}e;$$

для β^+-распада

$${}^{A}_{Z}X \to {}_{Z-1}{}^{A}Y + {}_{+1}^{0}e.$$

● Символическая запись ядерной реакции

$${}^{A}_{Z}X + a \to {}^{A'}_{Z'}Y + b, \text{ или } {}^{A}_{Z}X(a, b){}^{A'}_{Z'}Y,$$

где ${}^{A}_{Z}X$ и ${}^{A'}_{Z'}Y$ — исходное и конечное ядра соответственно с зарядовыми числами Z и Z' и массовыми числами A и A'; a и b — соответственно бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы.

● Энергия ядерной реакции

$$Q = c^2[(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)],$$

где m_1 и m_2 — массы покоя ядра-мишени и бомбардирующей частицы; $(m_3 + m_4)$ — суммы масс покоя ядер продуктов реакции. Если $Q > 0$ — экзотермическая реакция, $Q < 0$ — эндотермическая реакция.

● Энергия ядерной реакции представляется также в виде

$$Q = (T_1 + T_2) - (T_3 + T_4),$$

где T_1, T_2, T_3, T_4 — соответственно кинетические энергии ядра-мишени, бомбардирующей частицы, испускаемой частицы и ядра продукта реакции.

● Скорость нарастания цепной реакции

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(k-1)}{T}, \text{ откуда } N = N_0 e^{(k-1)t/T},$$

где N_0 — число нейтронов в начальный момент времени; N — число нейтронов в момент времени t; T — среднее время жизни одного поколения, k — коэффициент размножения нейтронов.

Примеры решения задач

Задача 1. При бомбардировке изотопа лития ${}^{6}_{3}Li$ дейтронами ${}^{2}_{1}H$ ($m_{{}^2_1H} = 3{,}3446 \cdot 10^{-27}$ кг) образуются две α-частицы ${}^{4}_{2}He$ ($m_{{}^4_2He} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг) и выделяется энергия $\Delta E = 22{,}3$ МэВ. Определить массу изотопа лития.

Дано: ${}^{6}_{3}Li + {}^{2}_{1}H \to 2{}^{4}_{2}He + \Delta E$, $\Delta E = 22{,}3$ МэВ $= 35{,}68 \cdot 10^{-13}$ Дж, $m_{{}^4_2He} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг, $m_{{}^2_1H} = 3{,}3446 \times 10^{-27}$ кг.

Определить $m_{{}^6_3Li}$.

Решение. Дефект массы ядра

$$\Delta m = m_{{}^6_3Li} + m_{{}^2_1H} - 2m_{{}^4_2He}. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$\Delta m = \Delta E/c^2, \quad (2)$$

поэтому из выражений (1) и (2) найдем искомую массу изотопа лития:

$$m_{{}^6_3Li} = \frac{\Delta E}{c^2} + 2m_{{}^4_2He} - m_{{}^2_1H}.$$

Вычисляя, получим $m_{{}^6_3Li} = 9{,}9884 \cdot 10^{-27}$ кг.

Задача 2. Первоначальная масса радиоактивного изотопа радона ${}^{222}_{86}Rn$ (период полураспада $T_{1/2} = 3{,}82$ сут) равна 1,5 г. Определить: 1) начальную активность изотопа; 2) его активность через 5 сут.

Дано: ${}^{222}_{86}Rn$, $m_0 = 1{,}5$ г $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг, $T_{1/2} = 3{,}82$ сут $= 3{,}82 \cdot 24 \cdot 3600$ с, $t = 5$ сут $= 5 \cdot 24 \cdot 3600$ с.

Определить: 1) A_0; 2) A.

Решение. Начальная активность изотопа

$$A_0 = \lambda N_0,$$

где $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}$ — постоянная радиоактивного распада; N_0 — число ядер изотопа в начальный момент времени: $N_0 = m_0 N_A/M$, где M — молярная масса радона ($M = 222 \times 10^{-3}$ кг/моль); $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро. Учитывая эти выражения, найдем искомую начальную активность изотопа:

$$A_0 = \frac{m_0 N_A \ln 2}{M T_{1/2}}.$$

Активность изотопа $A = \lambda N$, где, согласно закону радиоактивного распада, $N = N_0 e^{-\lambda t}$ — число нераспавшихся ядер в момент времени t. Учитывая, что $\lambda N_0 = A_0$, найдем, что активность нуклида уменьшается со временем по закону

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}.$$

Вычисляя, получаем: 1) $A_0 = 8{,}54 \cdot 10^{15}$ Бк; 2) $A = 3{,}45 \times \times 10^{15}$ Бк.

Задача 3. В результате соударения дейтрона с ядром бериллия $^9_4$Be образовались новое ядро и нейтрон. Определить порядковый номер и массовое число образовавшегося ядра, записать ядерную реакцию и определить ее энергетический эффект.

Дано: $^9_4\mathrm{Be} + ^2_1\mathrm{H} \rightarrow ^A_Z\mathrm{X} + ^1_0 n$.

Определить: Z; A; Q.

Решение. Из законов сохранения электрического заряда и массовых чисел следует, что $Z = 5$, а $A = 10$, т. е. образовавшееся в результате ядерной реакции ядро — изотоп бора $^{10}_5$B. Поэтому ядерную реакцию можно записать в виде

$$^9_4\mathrm{Be} + ^2_1\mathrm{H} \rightarrow ^{10}_5\mathrm{B} + ^1_0 n.$$

Энергетический эффект ядерной реакции

$$Q = c^2[(m_{^9_4\mathrm{Be}} + m_{^2_1\mathrm{H}}) - (m_{^{10}_5\mathrm{B}} + m_n)], \qquad (1)$$

где в первых круглых скобках указаны массы исходных ядер, во вторых — массы ядер продуктов реакции. При расчетах вместо масс ядер используют массы нейтральных атомов, так как, согласно закону сохранения зарядовых чисел, в ядерной реакции (а зарядовое число Z нейтрального атома равно числу электронов в его оболочке) получаются одинаковые результаты.

Массы нейтральных атомов в выражении (1):

$m_{^9_4\mathrm{Be}} = 1{,}4966 \cdot 10^{-26}$ кг, $m_{^2_1\mathrm{H}} = 3{,}3446 \cdot 10^{-27}$ кг, $m_{^{10}_5\mathrm{B}} = 1{,}6627 \cdot 10^{-26}$ кг, $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг.

Вычисляя, получим $Q = 4{,}84$ МэВ; энергетический эффект положителен; реакция экзотермическая.

Задачи

7.1. Определить массу нейтрального атома хрома $^{52}_{24}$Cr. [$8{,}64 \cdot 10^{-26}$ кг]

7.2. Объяснить отличие изотопов и изобаров.

7.3. Определить, какую часть массы нейтрального атома $^{12}_6$C ($m = 19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг) составляет масса его электронной оболочки. [$2{,}74 \cdot 10^{-4}$]

7.4. Определить число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов бора: 1) $^9_5$B; 2) $^{10}_5$B; 3) $^{11}_5$B.

7.5. Определить число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов кислорода: 1) $^{16}_8$O; 2) $^{17}_8$O; 3) $^{18}_8$O.

7.6. Определить, пользуясь таблицей Менделеева, число нейтронов и протонов в атомах платины и урана.

7.7 Определить зарядовые числа ядер, массовые числа и символы ядер, которые получатся, если в ядрах $^9_4$Be, $^{13}_7$N, $^{23}_{11}$Na нейтроны заменить протонами, а протоны — нейтронами.

7.8. Определить плотность ядерного вещества, выражаемую числом нуклонов в 1 см^3, если в ядре с массовым числом A все нуклоны плотно упакованы в пределах его радиуса. [$N = 3/(4\pi R_0^3) = 8{,}7 \cdot 10^{37}$ см$^{-3}$]

7.9. Объяснить, почему плотность ядерного вещества примерно одинакова для всех ядер.

7.10. Определить, что больше — масса атомного ядра или масса свободных нуклонов (протонов и нейтронов), входящих в его состав.

7.11. Определить, какая энергия в электрон-вольтах соответствует дефекту массы $\Delta m = 3$ мг. [16,9 ГэВ]

7.12. Определить энергию связи ядра атома гелия $^4_2$He. Масса нейтрального атома гелия равна $6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг. [28,4 МэВ]

7.13. Определить удельную энергию связи $\delta E_{св}$ (энергию связи, отнесенную к одному нуклону) для ядер: 1) $^4_2$He; 2) $^{12}_6$C. Массы нейтральных атомов гелия и углерода соответственно равны $6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ и $19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг. [1) 7,1 МэВ/нуклон; 2) 7,7 МэВ/нуклон]

7.14. Используя данные задачи 7.13, определить, какая необходима энергия, чтобы разделить ядро $^{12}_6$C на три альфа-частицы. [7,26 МэВ]

7.15. Определить массу изотопа $^{15}_7$N, если изменение массы при образовании ядра $^{15}_7$N составляет $0{,}2508 \cdot 10^{-27}$ кг. [$2{,}4909 \cdot 10^{-26}$ кг]

7.16. При отрыве нейтрона от ядра гелия $^4_2$He образуется ядро $^3_2$He. Определить энергию связи, которую необходимо для этого затратить. Массы нейтральных атомов $^4_2$He и $^3_2$He соответственно равны $6{,}6467 \cdot 40^{-27}$ и $5{,}0084 \cdot 10^{-27}$ кг. [20,64 МэВ]

7.17. Энергия связи $E_{св}$ ядра, состоящего из трех протонов и четырех нейтронов, равна 39,3 МэВ. Определить массу m нейтрального атома, обладающего этим ядром. [$1{,}165 \cdot 10^{-26}$ кг]

7.18 Определить, какую долю кинетической энергии теряет нейтрон при упругом столкновении с покоящимся ядром углерода $^{12}_{6}C$, если после столкновения частицы движутся вдоль одной прямой. Массу нейтрального атома углерода принять равной $19{,}9272\cdot10^{-27}$ кг. [0,286]

7.19 Определить число нуклонов, которые могут находиться в ядре на наинизшем квантовом уровне. [4]

7.20 Определить, во сколько раз магнетон Бора (единица магнитного момента электрона) больше ядерного магнетона (единица магнитного момента ядра). [В 1835 раз]

7.21 Охарактеризовать свойства и особенности сил, действующих между составляющими ядро нуклонами.

7.22 Объяснить принципы построения ядерной и оболочечной моделей ядра.

7.23 Объяснить, почему радиоактивные свойства элементов обусловлены только структурой их ядер.

7.24 Считая постоянную λ радиоактивного распада известной и используя закон радиоактивного распада, вывести выражение для: 1) периода полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного ядра; 2) среднего времени жизни τ радиоактивного ядра. [1) $T_{1/2}=(\ln 2)/\lambda$; 2) $\tau=1/\lambda$]

7.25 Определить постоянную радиоактивного распада λ для изотопов: 1) тория $^{229}_{90}Th$; 2) урана $^{238}_{92}U$; 3) иода $^{131}_{53}I$. Периоды полураспада этих изотопов соответственно равны: 1) $7\cdot10^3$ лет; 2) $4{,}5\cdot10^9$ лет; 3) 8 сут. [1) 3,13 пс; 2) 4,87 ас; 3) 1 мкс]

7.26. Определить, что (и во сколько раз) продолжительнее — три периода полураспада или два средних времени жизни радиоактивного ядра.

7.27. Определить, во сколько раз начальное количество ядер радиоактивного изотопа уменьшится за три года, если за один год оно уменьшилось в 4 раза. [В 64 раза]

7.28. Определить, какая часть (%) начального количества ядер радиоактивного изотопа останется нераспавшейся по истечении времени t, равного двум средним временам жизни τ радиоактивного ядра. [13,5 %]

7.29. Определить, какая часть начального количества ядер радиоактивного изотопа распадется за время t, равное двум периодам полураспада $T_{1/2}$. [0,75]

7.30. Определить период полураспада радиоактивного изотопа, если 5/8 начального количества ядер этого изотопа распалось за время $t = 849$ с. [10 мин]

7.31. Период полураспада радиоактивного изотопа актиния $^{225}_{89}Ac$ составляет 10 сут. Определить время, за которое

распадется $1/3$ начального количества ядер актиния. [5,85 сут]

7.32. Постоянная радиоактивного распада изотопа $^{210}_{82}Pb$ равна 10^{-9} с$^{-1}$. Определить время, в течение которого распадется 2/5 начального количества ядер этого радиоактивного изотопа. [16,2 года]

7.33. Вывести формулу для скорости радиоактивного распада через период полураспада $T_{1/2}$ и начальное число N_0 радиоактивных атомов. $\left[v = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \right]$

7.34. Первоначальная масса радиоактивного изотопа иода $^{131}_{53}I$ (период полураспада $T_{1/2}=8$ сут) равна 1 г. Определить: 1) начальную активность изотопа; 2) его активность через 3 сут. [1) $4{,}61\cdot10^{15}$ Бк; 2) $3{,}55\cdot10^{15}$ Бк]

7.35. Активность некоторого радиоактивного изотопа в начальный момент времени составляла 100 Бк. Определить активность этого изотопа по истечении промежутка времени, равного половине периода полураспада. [70,7 Бк]

7.36. Начальная активность 1 г изотопа радия $^{226}_{88}Ra$ равна 1 Ки. Определить период полураспада $T_{1/2}$ этого изотопа. [1582 года]

7.37. Принимая, что все атомы изотопа иода $^{131}_{53}I$ [$T_{1/2} = 8$ сут] массой $m = 1$ мкг радиоактивны, определить: 1) начальную активность A_0 этого изотопа; 2) его активность A через 3 сут. [1) 4,61 ТБк; 2) 3,55 ТБк]

7.38. Определить период полураспада $T_{1/2}$ некоторого радиоактивного изотопа, если его активность за 5 сут уменьшилась в 2,2 раза. [4,4 сут]

7.39. Определить удельную активность a (число распадов в 1 с на 1 кг вещества) изотопа $^{238}_{92}U$, если период его полураспада $T_{1/2}=4{,}5\cdot10^9$ лет. [$a=N_A(\ln 2)/(MT_{1/2}) = 12{,}3$ МБк/кг]

7.40. Объяснить, как изменяется положение химического элемента в таблице Менделеева после α- и β-распадов ядер его атомов.

7.41. Пользуясь таблицей Менделеева и правилами смещения, определить, в какой элемент превращается $^{238}_{92}U$ после трех α- и двух β^--распадов. [$^{226}_{88}Ra$]

7.42. Пользуясь таблицей Менделеева и правилами смещения, определить, в какой элемент превращается $^{233}_{92}U$ после шести α- и трех β^--распадов. [$^{209}_{83}Bi$]

7.43. Ядра радиоактивного изотопа тория $^{232}_{90}Th$ претерпевают последовательно α-распад, два β^--распада и

α-распад. Определить конечный продукт деления. [${}^{224}_{88}$Ra]

7.44. Определить, сколько β- и α-частиц выбрасывается при превращении ядра таллия ${}^{210}_{81}$Tl в ядро свинца ${}^{206}_{82}$Pb. [Три β-частицы и одна α-частица]

7.45. Радиоактивный изотоп радия ${}^{225}_{88}$Ra претерпевает четыре α-распада и два β^--распада. Определить для конечного ядра: 1) зарядовое число Z; 2) массовое число A. [1) 82, 2) 209]

7.46. Записать α-распад радия ${}^{226}_{88}$Ra.

7.47. Определить высоту кулоновского потенциального барьера для α-частицы в ядре свинца ${}^{206}_{82}$Pb. [22,5 МэВ]

7.48. Покоившееся ядро радона ${}^{222}_{86}$Rn испускает α-частицу, имеющую скорость 16 Мм/с. Зная, что масса дочернего ядра составляет $3{,}62\cdot10^{-25}$ кг, определить: 1) импульс α-частицы; 2) кинетическую энергию α-частицы; 3) импульс отдачи дочернего ядра; 4) кинетическую энергию отдачи дочернего ядра. [1) $1{,}07\cdot10^{-19}$ кг·м/с; 2) 5,35 МэВ; 3) $1{,}07\cdot10^{-19}$ кг·м/с; 4) 9,89 кэВ]

7.49. Покоившееся ядро полония ${}^{200}_{84}$Po испускает α-частицу с кинетической энергией $T_\alpha = 5{,}77$ МэВ. Определить: 1) скорость отдачи дочернего ядра; 2) какую долю кинетической энергии α-частицы составляет энергия отдачи дочернего ядра. [1) 339 км/с; 2) 0,02]

7.50. Определить энергию, выделяющуюся в результате реакции ${}^{23}_{12}\mathrm{Mg} \to {}^{23}_{11}\mathrm{Na} + {}^{0}_{1}e + {}^{0}_{0}\nu$. Массы нейтральных атомов магния и натрия соответственно равны $3{,}8184\times10^{-26}$ и $3{,}8177\cdot10^{-26}$ кг. [$Q = 2{,}91$ МэВ]

7.51. Записать β^--распад магния ${}^{27}_{12}$Mg.

7.52. Известно, что β^--активные ядра обладают до распада и после него вполне определенными энергиями, в то же время энергетический спектр β^--частиц является непрерывным. Объяснить непрерывность энергетического спектра испускаемых электронов.

7.53. Объяснить, почему существование антинейтрино полностью позволяет объяснить все особенности β^--распада.

7.54. Записать превращение нейтрона в протон с указанием частиц, которые при этом испускаются. Объяснить, почему этот процесс является энергетически возможным.

7.55. Объяснить, почему при α-распаде одинаковых ядер энергии α-частиц одинаковы, а при β^-распаде одинаковых ядер энергии электронов различны.

7.56. Применяя понятия квантовой статистики, объяснить,

почему невозможно принципиально создать «нейтринный лазер».

7.57. Описать основные процессы, происходящие при взаимодействии γ-излучения с веществом.

7.58. Свободное покоившееся ядро ${}^{191}_{77}$Ir ($m = 317{,}10953\times10^{-27}$ кг) с энергией возбуждения $E = 129$ кэВ перешло в основное состояние, испустив γ-квант. Определить изменение энергии γ-кванта, возникающее в результате отдачи ядра. [$\Delta\varepsilon = E^2/(mc^2) = 0{,}047$ эВ]

7.59. Назвать два важных механизма, которыми можно объяснить ослабление потока фотонов с энергией $E = 500$ кэВ при его прохождении через вещество.

7.60. Объяснить, почему треки α-частиц представляют сплошную толстую линию, а треки β^--частиц — тонкую пунктирную линию.

7.61. Объяснить, где и почему лучше исследовать длинные цепи рождений и распадов частиц высоких энергий — в камере Вильсона или в пузырьковой камере.

7.62. Определить, является ли реакция ${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \to {}^{7}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{0}n$ экзотермической или эндотермической. Определить энергию ядерной реакции. [1,64 МэВ]

7.63. Определить, поглощается или выделяется энергия при ядерной реакции ${}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}n$. Определить эту энергию. [17,6 МэВ]

7.64. Определить, выделяется или поглощается энергия при ядерной реакции ${}^{44}_{20}\mathrm{Ca} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \to {}^{41}_{19}\mathrm{K} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$. Массы ядер, участвующих в реакции: $m_{{}^{44}_{20}\mathrm{Ca}} = 7{,}2992\cdot10^{-26}$ кг, $m_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}} = 1{,}6736\cdot10^{-27}$ кг, $m_{{}^{41}_{19}\mathrm{K}} = 6{,}8021\cdot10^{-27}$ кг, $m_{{}^{4}_{2}\mathrm{He}} = 6{,}6467\cdot10^{-27}$ кг.

7.65. Определить, выделяется или поглощается энергия при ядерной реакции ${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{17}_{8}\mathrm{O}$. Массы ядер, участвующих в реакции: $m_{{}^{14}_{7}\mathrm{N}} = 2{,}3253\cdot10^{-26}$ кг, $m_{{}^{4}_{2}\mathrm{He}} = 6{,}6467\cdot10^{-27}$ кг, $m_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}} = 1{,}6737\cdot10^{-27}$ кг, $m_{{}^{17}_{8}\mathrm{O}} = 2{,}8229\cdot10^{-26}$ кг.

7.66. Определить зарядовое число Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x, в символической записи ядерной реакции: 1) ${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{17}_{8}\mathrm{O} + x$; 2) ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{12}_{6}\mathrm{C} + x$; 3) ${}^{6}_{3}\mathrm{Li} + x \to {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

7.67. Записать недостающие обозначения x в следующих ядерных реакциях: 1) ${}^{10}_{5}\mathrm{B}(n, \alpha)x$; 2) ${}^{40}_{18}\mathrm{Ar}(\alpha, n)x$; 3) $x(p, n){}^{37}_{18}\mathrm{Ar}$, 4) ${}^{3}_{2}\mathrm{He}(x, p){}^{3}_{1}\mathrm{H}$; 5) $x(n, \alpha){}^{3}_{1}\mathrm{H}$.

7.68. В ядерной реакции ${}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \to {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}n$ выделяется энергия $\Delta E = 3{,}27$ МэВ. Определить массу атома ${}^{3}_{2}$He, если масса атома ${}^{2}_{1}$H равна $3{,}34461\cdot10^{-27}$ кг. [$5{,}00841\times10^{-27}$ кг]

7.69. Первая в истории искусственная ядерная реакция осуществлена Резерфордом. Записать эту реакцию и объяснить ее огромное значение для развития ядерной физики.

7.70. Жолио-Кюри облучали алюминий $^{27}_{13}Al$ α-частицами, в результате чего испускался нейтрон и образовывалось искусственно-радиоактивное ядро, испытывающее β^+-распад. Записать эту реакцию.

7.71. Жолио-Кюри облучали магний $^{24}_{12}Mg$ α-частицами, в результате чего испускался нейтрон и образовывалось искусственно-радиоактивное ядро, испытывающее β^+-распад. Записать данную реакцию.

7.72. Записать превращение протона в нейтрон с указанием частиц, которые при этом испускаются. Объяснить, почему это превращение энергетически возможно только для протона, связанного в ядре.

7.73. В процессе осуществления реакции $\gamma \to {}_{-1}^{0}e + {}_{+1}^{0}e$ энергия E_0 фотона составляла 2,02 МэВ. Определить полную кинетическую энергию позитрона и электрона в момент их возникновения. [1 МэВ]

7.74. При столкновении позитрона и электрона происходит их аннигиляция, в процессе которой электронно-позитронная пара превращается в два γ-кванта, а энергия пары переходит в энергию фотонов. Определить энергию каждого из возникших фотонов, принимая, что кинетическая энергия электрона и позитрона до их столкновения пренебрежимо мала. [0,51 МэВ]

7.75. Записать схему электронного захвата (e-захвата) и объяснить его отличие от $\beta^{\mp}$-распадов. Привести пример электронного захвата.

7.76. Дополнить недостающие обозначения x в следующих ядерных реакциях:

1) $^{235}_{x}U + {}^{1}_{0}n \to {}^{145}_{57}La + x + 4\,{}^{1}_{0}n$;

2) $^{235}_{x}U + {}^{1}_{0}n \to {}^{99}_{x}Zr + {}^{135}_{x}Te + x\,{}^{1}_{0}n$;

3) $^{232}_{x}Th + {}^{1}_{0}n \to x + {}^{140}_{x}Xe + 3\,{}^{1}_{0}n$;

4) $^{x}_{x}Pu + {}^{1}_{0}n \to {}^{80}_{x}Se + {}^{157}_{x}Nd + 3\,{}^{1}_{0}n$.

7.77. Под действием каких частиц — нейтронов или α-частиц — ядерные реакции осуществляются более эффективно? Объяснить ответ.

7.78. Объяснить, почему на медленных нейтронах в основном идут реакции типа (n, n) и (n, γ), а на быстрых нейтронах — реакции типа (n, p) и (n, α).

7.79. Для обнаружения нейтронов используются реакции

захвата тепловых нейтронов легкими ядрами ($^{3}_{2}He$, $^{10}_{5}B$), в результате которых испускаются заряженные частицы. Записать возможные реакции.

7.80. При энергиях нейтронов $\approx$10 МэВ становится возможной на ядре урана $^{238}_{92}U$ ядерная реакция типа $(n, 2n)$, в результате чего образуется искусственно-радиоактивное ядро, испытывающее β^--распад. Записать эту реакцию.

7.81. Ядро урана $^{238}_{92}U$, захватывая быстрый нейтрон, превращается в радиоактивный изотоп урана, который претерпевает β^--распад, и превращается в трансурановый элемент, который в свою очередь также претерпевает β^--распад, в результате чего образуется плутоний. Записать все эти процессы в виде ядерной реакции.

7.82. Определить кинетическую энергию T и скорость v теплового нейтрона при температуре окружающей среды, равной 17 °C. [$T = 6 \cdot 10^{-21}$ Дж; $v = 2{,}68$ км/с]

7.83. Ядро урана, $^{235}_{92}U$, захватывая тепловой нейтрон, делится на два осколка с массовыми числами 95 и 139, второй из которых, являясь радиоактивным, претерпевает три β^--распада. Записать реакцию деления, а также цепочку β^--распадов.

7.84. При захвате теплового нейтрона ядром урана $^{235}_{92}U$ образуются два осколка деления и два нейтрона. Определить порядковый номер Z и массовое число A одного из осколков, если другим осколком является ядро стронция $^{95}_{38}Sr$.

7.85. Объяснить, почему деление тяжелых ядер должно сопровождаться выделением большого количества энергии.

7.86. Определить энергию (в электрон-вольтах), которую можно получить при расщеплении 1 г урана $^{235}_{92}U$, если при расщеплении каждого ядра урана выделяется энергия 200 МэВ. [$5{,}12 \cdot 10^{23}$ МэВ]

7.87. Определить суточный расход чистого урана $^{235}_{92}U$ атомной электростанцией тепловой мощностью $P = 300$ МВт, если энергия E, выделяющаяся при одном акте деления, составляет 200 МэВ. [316 г]

7.88. Определить, во сколько раз увеличится число нейтронов в цепной ядерной реакции за время $t = 10$ с, если среднее время жизни T одного поколения составляет 80 мс, а коэффициент размножения нейтронов $k = 1{,}002$. [В 1,284 раза]

7.89. Объяснить, какой характер носит цепная реакция деления, если коэффициент размножения: 1) $k>1$; 2) $k=1$; 3) $k<1$.

7.90. В ядерном реакторе на тепловых нейтронах среднее время жизни T одного поколения нейтронов составляет 90 мс. Принимая коэффициент размножения нейтронов $k \approx 1{,}002$, определить период τ реактора, т. е. время, в течение которого поток тепловых нейтронов в реакторе возрастет в e раз. $[\tau = T/(k-1) = 45$ с$]$

7.91. Определить число нейтронов, возникающих за 1 с в ядерном реакторе тепловой мощностью $P = 200$ МВт, если известно, что при одном акте деления выделяется энергия $E = 200$ МэВ, а среднее число нейтронов на один акт деления составляет 2,5. $[1{,}56 \cdot 10^{19}\ \text{c}^{-1}]$

7.92. Объяснить особенности реактора-размножителя и записать ядерные реакции, за счет которых может идти в них процесс воспроизводства ядерного горючего.

7.93. В водородной бомбе вместо реакции ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + {}^1_0n$ используется реакция ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0n$. Объяснить почему.

7.94. Объяснить, почему реакция синтеза атомных ядер — образование из легких ядер более тяжелых — является колоссальным источником энергии.

7.95. Объяснить, почему для протекания термоядерной реакции необходимы очень высокие температуры.

7.96. Известно, что в углеродно-азотном, или углеродном, цикле число ядер углерода остается неизменным. В результате этого цикла четыре ядра водорода ${}^1_1\text{H}$ (протона) превращаются в ядро гелия ${}^4_2\text{He}$, а также образуются три γ-кванта, два позитрона и два нейтрино. Записав эту реакцию, определить выделяющуюся в этом процессе энергию. [25,8 МэВ]

7.2. Элементы физики элементарных частиц

Задачи

7.97. Дать определение и объяснить происхождение первичного и вторичного космического излучения.

7.98. Объяснить происхождение мягкого и жесткого компонентов вторичного космического излучения.

7.99. Представить схематически и объяснить происхождение электронно-позитронно-фотонного, или каскадного, ливня.

7.100. Записать схемы распада положительного и отрицательного мюонов.

7.101. При соударении высокоэнергетического положительного мюона и электрона может образоваться два нейтрино. Записать эту реакцию и объяснить, какого типа нейтрино образуются.

7.102. При захвате протоном отрицательного мюона образуется нейтрон и еще одна частица. Записать эту реакцию и определить, что это за частица.

7.103. Принимая, что энергия релятивистских мюонов в космическом излучении составляет 3 ГэВ, определить расстояние, проходимое мюонами за время их жизни, если собственное время жизни мюона $t_0 = 2{,}2$ мкс, а энергия покоя $E_0 = 100$ МэВ. [19,8 км]

7.104. Известно, что продукты распада заряженных пионов испытывают дальнейший распад. Записать цепочку реакций для π^+- и π^--мезонов.

7.105. π^0-мезон распадается в состоянии покоя на два γ-кванта. Принимая массу покоя пиона равной $264{,}1 m_e$, определить энергию каждого из возникших γ-квантов. [67,7 МэВ]

7.106. Известно, что распад нейтрального короткоживущего каона происходит по схеме $K^0_s \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Принимая, что до момента распада каон покоился и его масса покоя составляет $974 m_e$, определить массу покоя образовавшихся заряженных π-мезонов, если известно, что масса каждого образовавшегося пиона в 1,783 раза больше его массы покоя. $[273{,}1 m_e]$

7.107. K^+-мезон распадается (в состоянии покоя) на два пиона. Принимая массу покоя каона равной $966{,}2 m_e$ и пренебрегая разностью масс заряженного и нейтрального пионов, определить энергию каждого из возникших пионов. [247,5 МэВ]

7.108. Назвать и охарактеризовать четыре типа фундаментальных взаимодействий, а также сравнить радиусы их действия. Какое из взаимодействий является универсальным?

7.109. Что называется изотопическим мультиплетом и изотопическим спином?

7.110. Возможно ли вынужденное излучение, если фотоны были бы фермионами? Дать объяснение.

7.111. Объяснить, в чем заключается принцип зарядового сопряжения.

7.112. Записать продукты распада антинейтрона.

7.113. При столкновении нейтрона и антинейтрона происходит их аннигиляция, в результате чего возникает два γ-кванта, а энергия частиц переходит в энергию γ-квантов. Определить энергию каждого из возникших γ-квантов, принимая, что кинетическая энергия нейтрона и позитрона до их столкновения пренебрежимо мала. [942 МэВ]

7.114. Перечислить основные свойства нейтрино и антинейтрино и объяснить, чем по современным представлениям они отличаются друг от друга.

7.115. Выбрав из четырех типов нейтрино (ν_e, $\tilde{\nu}_e$, ν_μ, $\tilde{\nu}_\mu$) правильное, написать недостающие обозначения (x) в каждой из приведенных реакций:

1) $x + {}^1_0n \to {}^1_1p + {}^{\ 0}_{-1}e$;

2) $x + {}^1_0n \to {}^1_1p + \mu^-$;

3) $x + {}^1_1p \to {}^1_0n + {}^{\ 0}_{+1}e$.

7.116. Назвать элементарную частицу, обладающую наименьшей массой покоя. Чему равен электрический заряд этой частицы?

7.117. Элементарным частицам приписывают квантово-механическую величину — четность. Что она характеризует? В чем заключается закон сохранения четности и при каких взаимодействиях он выполняется?

7.118. Объяснить, какая характеристика элементарных частиц положена в основу деления адронов на мезоны и барионы.

7.119. Объяснить, к какой группе элементарных частиц и почему относится: 1) Λ^0-гиперон; 2) протон; 3) таон; 4) π^0-мезон.

7.120. Объяснить, к какой группе элементарных частиц и почему относится: 1) мюонное нейтрино; 2) нейтрон; 3) фотон; 4) K^0-мезон.

7.121. Перечислить, какие величины сохраняются для процессов взаимопревращаемости элементарных частиц, обусловленных слабым и сильным взаимодействиями.

7.122. Определить, какие из приведенных ниже процессов разрешены законом сохранения лептонного заряда: 1) $p \to n + e^+ + \nu_e$; 2) $K^- \to \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$; 3) $\pi^+ \to \mu^+ + e^- + e^+$; 3) $K^+ \to e^+ + \pi^0 + \nu_e$.

7.123. Определить, какие из приведенных ниже процессов запрещены законом сохранения странности: 1) $p + \pi^- \to \Lambda^0 + K^0$; 2) $p + \pi^- \to \Sigma^+ + K^-$; 3) $p + n \to \Lambda^0 + \Sigma^+$; 4) $p + \pi^- \to K^- + K^+ + n$.

7.124. Ниже приведены запрещенные способы распада. Перечислите для каждого из них законы сохранения, которые он нарушает. 1) $\pi^- \to \mu^- + \nu_\mu$; 2) $K^- + n \to \Omega^- + K^+ + K^0$; 3) $p + n \to \Lambda^0 + \Sigma^+$.

7.125. Ниже приведены запрещенные способы распада. Перечислите для каждого из них законы сохранения, которые в нем нарушаются. 1) $p + p \to p + \pi^+$; 2) $\pi^- + p \to K^- + \Sigma^+$; 3) $\pi^- + n \to \Lambda^0 + K^-$; 4) $\pi^- \to \mu^- + e^+ + e^-$.

7.126. Исследование взаимопревращаемости элементарных частиц привело к открытию нового свойства симметрии — операции зарядового сопряжения, заключающееся в том, что при замене частицы на античастицу в уравнении данной реакции получается новая реакция. Применить операцию зарядового сопряжения к следующим процессам: 1) $\Sigma^+ \to p + \pi^0$; 2) $p + \tilde{p} \to \Sigma^0 + \tilde{\Lambda}^0 + K^0 + K^-$.

7.127. Применить операцию зарядового сопряжения (см. задачу 7.126) к следующим процессам: 1) $\pi^0 \to 2\gamma$; 2) $p + K^- \to \Sigma^0 + \pi^+ + \pi^-$.

7.128. Охарактеризовать основные свойства кварков (антикварков) — заряды (электрический и барионный), спин, странность, цвет, очарование, прелесть.

7.129. Объяснить, почему понадобилось введение внутренних характеристик кварков — цвета и очарования.

7.130. Записать, какие комбинации известных в настоящее время кварков воспроизводят свойства: 1) нейтрона, 2) протона; 3) π^+-мезона, 4) π^--мезона; 5) Σ^0-гиперона.

Приложения

1. Некоторые математические формулы

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \quad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right)=-\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x \qquad \frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\mathrm{tg}\, x)=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ (n\neq 1)$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x \qquad \int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x} \qquad \int\sin x\,dx=-\cos x$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x \qquad \int e^x dx=e^x \qquad \int_0^\infty x^n e^{-x}dx=n!$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx=\frac{n!}{a^{n+1}} \qquad \int_0^\infty x\, e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2a} \qquad \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}a^{-2}$$

$$\int_0^\infty\frac{x\,dx}{e^x-1}=\frac{\pi^2}{6} \qquad \int_0^\infty\frac{x^3dx}{e^x-1}=\frac{\pi^4}{15} \qquad \int u\,dv=uv-\int v\,du$$

2. Десятичные приставки к названиям единиц

Т — тера (10^{12})	д — деци (10^{-1})	н — нано (10^{-9})
Г — гига (10^{9})	с — санти (10^{-2})	п — пико (10^{-12})
М — мега (10^{6})	м — милли (10^{-3})	ф — фемто (10^{-15})
к — кило (10^{3})	мк — микро (10^{-6})	а — атто (10^{-18})

3. Некоторые внесистемные величины

1 сут = 86400 с

1 год = 365,25 сут = $3{,}16\cdot 10^7$ с

$1^\circ = 1{,}75\cdot 10^{-2}$ рад

$1' = 2{,}91\cdot 10^{-4}$ рад

$1'' = 4{,}85\cdot 10^{-6}$ рад

1 мм рт. ст. = 133,3 Па

1 эВ = $1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж

4. Некоторые астрономические величины

Радиус Земли	$6{,}37\cdot 10^6$ м
Масса Земли	$5{,}98\cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}95\cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$1{,}98\cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1{,}74\cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7{,}33\cdot 10^{22}$ кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1{,}49\cdot 10^{11}$ м
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3{,}84\cdot 10^8$ м

5. Основные физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 3{,}00\cdot 10^8$ м/с
Нормальное ускорение свободного падения	$g = 9{,}81$ м/с^2
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2)
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	$R = 8{,}31$ Дж/(К$\cdot$моль)
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	$e = 1{,}60\cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}672\cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}675\cdot 10^{-27}$ кг
Удельный заряд электрона	$e/m_e = 1{,}76\cdot 10^{11}$ Кл/кг
Постоянная Стефана — Больцмана	$\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К^4)
Постоянная Вина	$b = 2{,}90\cdot 10^{-3}$ м$\cdot$К
Постоянная Планка	$h = 6{,}63\cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с
Постоянная Ридберга	$R = 3{,}29\cdot 10^{15}$ с$^{-1}$
	$R' = 1{,}10\cdot 10^7$ м$^{-1}$
Первый боровский радиус	$a_0 = 5{,}28\cdot 10^{-11}$ м
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_C = 2{,}43\cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	$\mu_B = 9{,}27\cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м
	$1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\cdot 10^9$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м
Атомная единица массы	1 а.е.м. $= 1{,}6606\cdot 10^{-27}$ кг
Масса изотопа $^1_1$H	$m_H = 1{,}6736\cdot 10^{-27}$ кг

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭЛЕМЕНТОВ Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА

Периоды	I а б	II а б	III а б	IV а б	V а б	VI а б	VII а б	VIII а	VIII б		
1	H						1 H 1,0079 ВОДОРОД	2 He 4,00260 ГЕЛИЙ			
2	3 Li 6,941 ЛИТИЙ	4 Be 9,01218 БЕРИЛЛИЙ	5 B 10,81 БОР	6 C 12,011 УГЛЕРОД	7 N 14,0067 АЗОТ	8 O 15,9994 КИСЛОРОД	9 F 18,99840 ФТОР	10 Ne 20,179 НЕОН			
3	11 Na 22,98977 НАТРИЙ	12 Mg 24,305 МАГНИЙ	13 Al 26,98154 АЛЮМИНИЙ	14 Si 28,086 КРЕМНИЙ	15 P 30,97376 ФОСФОР	16 S 32,06 СЕРА	17 Cl 35,453 ХЛОР	18 Ar 39,948 АРГОН			
4	19 K 39,098 КАЛИЙ	20 Ca 40,08 КАЛЬЦИЙ	21 Sc 44,9559 СКАНДИЙ	22 Ti 47,90 ТИТАН	23 V 50,9414 ВАНАДИЙ	24 Cr 51,996 ХРОМ	25 Mn 54,9380 МАРГАНЕЦ		26 Fe 55,847 ЖЕЛЕЗО	27 Co 58,9332 КОБАЛЬТ	28 Ni 58,70 НИКЕЛЬ
	29 Cu 63,546 МЕДЬ	30 Zn 65,38 ЦИНК	31 Ga 69,72 ГАЛЛИЙ	32 Ge 72,59 ГЕРМАНИЙ	33 As 74,9216 МЫШЬЯК	34 Se 78,96 СЕЛЕН	35 Br 79,904 БРОМ	36 Kr 83,80 КРИПТОН			
5	37 Rb 85,4678 РУБИДИЙ	38 Sr 87,62 СТРОНЦИЙ	39 Y 88,9059 ИТТРИЙ	40 Zr 91,22 ЦИРКОНИЙ	41 Nb 92,9064 НИОБИЙ	42 Mo 95,94 МОЛИБДЕН	43 Tc [97] ТЕХНЕЦИЙ		44 Ru 101,07 РУТЕНИЙ	45 Rh 102,9055 РОДИЙ	46 Pd 106,4 ПАЛЛАДИЙ
	47 Ag 107,868 СЕРЕБРО	48 Cd 112,40 КАДМИЙ	49 In 114,82 ИНДИЙ	50 Sn 118,69 ОЛОВО	51 Sb 121,75 СУРЬМА	52 Te 127,60 ТЕЛЛУР	53 I 126,9045 ИОД	54 Xe 131,30 КСЕНОН			
6	55 Cs 132,9054 ЦЕЗИЙ	56 Ba 137,34 БАРИЙ	57 La* 138,9055 ЛАНТАН	72 Hf 178,49 ГАФНИЙ	73 Ta 180,9479 ТАНТАЛ	74 W 183,85 ВОЛЬФРАМ	75 Re 186,207 РЕНИЙ		76 Os 190,2 ОСМИЙ	77 Ir 192,22 ИРИДИЙ	78 Pt 195,09 ПЛАТИНА
	79 Au 196,9665 ЗОЛОТО	80 Hg 200,59 РТУТЬ	81 Tl 204,37 ТАЛЛИЙ	82 Pb 207,2 СВИНЕЦ	83 Bi 208,9804 ВИСМУТ	84 Po [209] ПОЛОНИЙ	85 At [210] АСТАТ	86 Rn [222] РАДОН			
7	87 Fr [223] ФРАНЦИЙ	88 Ra [226] РАДИЙ	89 Ac** [227] АКТИНИЙ	104 (Ku) [261] КУРЧАТОВИЙ	105 (Ns) [261] (НИЛЬСБОРИЙ)	106 E-W [263]					

* ЛАНТАНОИДЫ

58 Ce 140,12 ЦЕРИЙ	59 Pr 140,9077 ПРАЗЕОДИМ	60 Nd 144,24 НЕОДИМ	61 Pm [145] ПРОМЕТИЙ	62 Sm 150,4 САМАРИЙ	63 Eu 151,96 ЕВРОПИЙ	64 Gd 157,25 ГАДОЛИНИЙ
65 Tb 158,9254 ТЕРБИЙ	66 Dy 162,50 ДИСПРОЗИЙ	67 Ho 164,9304 ГОЛЬМИЙ	68 Er 167,26 ЭРБИЙ	69 Tm 168,9342 ТУЛИЙ	70 Yb 173,04 ИТТЕРБИЙ	71 Lu 174,97 ЛЮТЕЦИЙ

** АКТИНОИДЫ

90 Th 232,0381 ТОРИЙ	91 Pa [231] ПРОТАКТИНИЙ	92 U 238,029 УРАН	93 Np [237] НЕПТУНИЙ	94 Pu [244] ПЛУТОНИЙ	95 Am [243] АМЕРИЦИЙ	96 Cm [247] КЮРИЙ
97 Bk [247] БЕРКЛИЙ	98 Cf [251] КАЛИФОРНИЙ	99 Es [254] ЭЙНШТЕЙНИЙ	100 Fm [257] ФЕРМИЙ	101 Md [258] МЕНДЕЛЕВИЙ	102 (No) [259] (НОБЕЛИЙ)	103 (Lr) [260] (ЛОУРЕНСИЙ)

Содержание

Учебное издание

Трофимова Таисия Ивановна

Сборник задач по курсу физики

Редактор *Г. И. Чернышева*
Художественный редактор *Т. А. Коленкова*
Технический редактор *Л. А. Овчинникова*
Корректор *Г. И. Кострикова*
Оператор *Е. Н. Чмелева*

ИБ № 10369

ЛР № 010146 от 25.12.91. Изд. № ФМ-140. Сдано в набор и подп. в печать 26.02.96 Формат 84×108 $^1/_{32}$. Бум. тип. № 2. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Объем 15,96 усл. печ. л. 16,17 усл. кр.-отт. 15,41 уч. изд. л. Тираж 10 000 экз. Зак. №130

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д.29/14.

Набрано на персональном компьютере издательства.

Отпечатано в ОАО «Оригинал», 101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7.